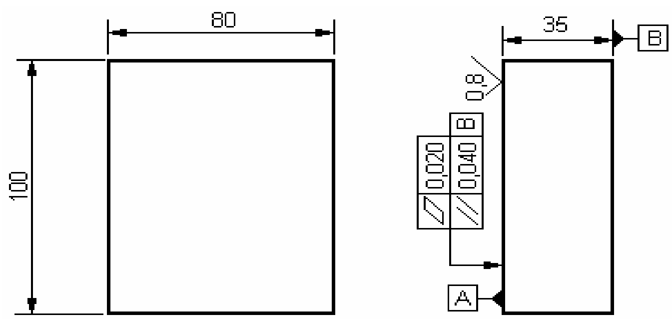
ASPECTE PRIVIND MÃSURAREA ABATERILOR DE LA PLANEITATE

Ionescu Tone, Prof. dr. ing.,Universitatea Tehnicã de Construcţii Bucureşti
Rece Laurenţiu, Prof. dr. ing.,Universitatea Tehnicã de Construcţii Bucureşti

1- INTRODUCERE

În cazul multor componente hidraulice existã una sau mai multe suprafeţe plane principale iar în cazul corpurilor distribuitoarelor sau al unor blocuri hidraulice acestea au chiar formã de paralelipiped dreptunghic. De exemplu, în cazul unui corp de distribuitor hidraulic (Fig. 1) suprafaţa de contact **A** trebuie sã respecte condiţii riguroase de planeitate, din considerente funcţionale. Se cere sã se mãsoare abaterile de planeitate ale suprafeţei **A** si sã se recomande o metodã de mãsurare a acestor abateri.

Fig. 1



Conform SR EN ISO 1101-2017, abaterea de planeitate este definitã ca distanţa maximã dintre suprafaţa realã şi planul adiacent, mãsuratã în limitele suprafeţei de referinţã sau a întregii suprafeţe. Planul adiacent este definit ca fiind tangent la suprafaţa realã, aşezat astfel încât distanţa maximã dintre suprafaţa realã şi plan sã fie minimã.

Aceasta definiţie a planului adiacent poate constitui însã o sursã de confuzii deoarece materializarea planului adiacent este dificilã, discutabilã sau nerealizabilã, în funcţie de metoda de mãsurare utilizatã. În mod practic se folosesc douã metode de materializare a unui astfel de plan de referintã:

I. Metoda planului definit de trei puncte alese arbitrar;
II. Metoda planului definit prin teoria celor mai mici patrate;

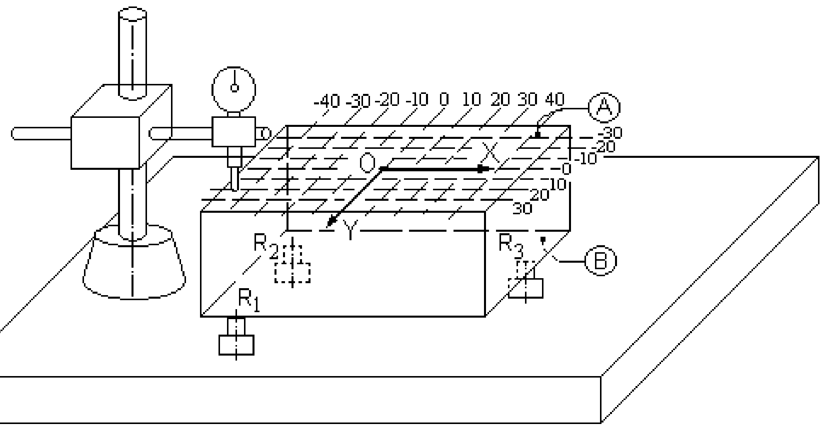
În afarã de acestea douã, propunem şi o nouã metodã considerabil mai precisã.

III. Metoda planului definit prin rezolvare matricealã (MATLAB).

1. METODA PLANULUI DEFINIT DE TREI PUNCTE ALESE ARBITRAR

Pentru această metoda trebuie ca piesa de studiat să se sprijine prin intermediul a trei reazeme reglabile pe o masă de control (Fig. 2). Cu ajutorul unui dispozitiv cu ceas comparator se palpează punctele O_1, O_2 si O_3 opuse reazemelor (R_1, R_2, R_3) si se reglează aceste reazeme până când se obţin abateri nule. Planul de referintă, paralel cu masa de control, va fi definit de cele trei puncte O_1, O_2 si O_3 . Abaterile de planeitate vor fi definite ca fiind distanţele măsurate între punctele suprafeţei piesei şi acest plan de referinţă.

Fig. 2



Concret, în cazul piesei studiate s-a facut măsurarea în punctele unui caroiaj rectangular de 9x7 puncte (corespunzatoare axelor *OX* şi respectiv *OY*) rezultând următoarele abateri (TAB. 1):

Tabelul 1

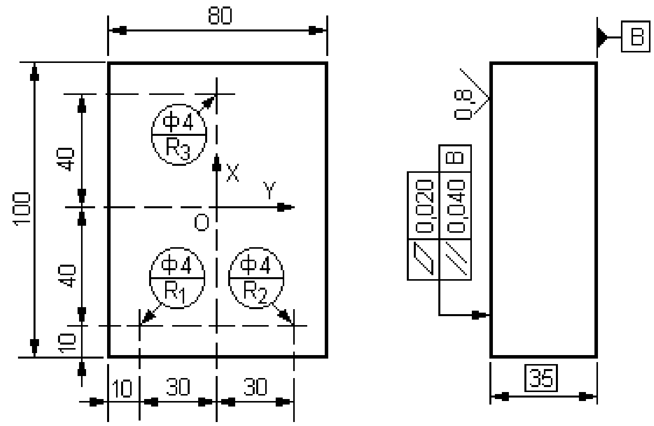
x → *y* ↓	*-40*	*-30*	*-20*	*-10*	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*
-30	0	3	6	4	5	7	9	10	12
-20	-1	4	3	7	9	11	10	12	12
-10	-4	6	9	12	11	10	11	12	14
0	0	-2	5	9	11	14	9	7	0
10	-2	7	9	10	11	**16**	12	9	9
20	-3	**- 5**	8	12	13	15	10	10	11
30	0	5	9	14	11	8	9	10	12

Analizând aceste date se observă că abaterea maximă de planitate, definită ca diferenţă a abaterilor limită, este:

$AFp_{,1}$= 16 - (- 5) = 21 μm > Tfp = 20 μm (conforn intervalului de dimensiuni 63-100 mm si clasei de precizie VIII din SR EN ISO 1101-2017).

Pentru ca această metodă de măsurare să se aplice mai corect şi pentru îmbunătăţirea repetabilităţii măsurătorilor, trebuie ca desenul de execuţie să fie refăcut conform recomandărilor de stabilire a bazelor de referinţă din SR EN ISO 1101-2017 (Fig. 3).

Fig. 3



2. METODA PLANULUI DEFINIT PRIN TEORIA CELOR MAI MICI PATRATE

Pentru realizarea mãsuratorilor piesa se poate instala la fel ca în cazul primei metode sau se poate aseza direct pe masa de control. Dacã se va menţine aceeaşi schema de mãsurare atunci se vor obtine aceleasi valori ale abaterilor (TAB. 1) iar aceste date vor servi pentru determinarea planului de referinţã în raport cu care suma pãtratelor distanţelor faţã de punctele suprafeţei este minimã. Ecuaţia planului definit prin metoda celor mai mici pãtrate este de tipul: $z = z_0 + \alpha x + \beta y$

unde termenul liber z_0 şi coeficientii α si β sunt daţi de sistemul matriceal:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} y_i^2 & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} z_i \\ \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} z_i y_i \end{vmatrix}$$

unde: n = numãrul total de puncte de mãsurã (conform Fig. 2 si Tab. 1 rezultã ca n = 9x7 = 63).

Se observã cã dacã originea sistemului de coordonate OXY este aleasã în poziţie centralã (Fig. 2) şi dacã divizarea se face într-un numãr impar de paşi atunci calculele se vor simplifica deoarece:

$$\sum_{i=1}^{63} x_i = \sum_{i=1}^{63} y_i = \sum_{i=1}^{63} x_i y_i = 0$$

Efectuînd calculele pentru datele mãsurãtorilor (TAB. 1) rezultã:

$$\sum_{i=1}^{63} x_i^2 = 42000 \qquad \sum_{i=1}^{63} y_i^2 = 19600$$

$$\sum_{i=1}^{63} z_i = 487 \qquad \sum_{i=1}^{63} z_i x_i = 5250 \qquad \sum_{i=1}^{63} z_i y_i = 700$$

deci sistemul de ecuaţii se poate scrie de forma: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 63 \\ 42000 & 0 & 0 \\ 0 & 19600 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 487 \\ 5250 \\ 700 \end{vmatrix}$

Rezultã :

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 63 z_0 = 487 \\ 42000 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot z_0 = 5250 \\ 0 \cdot \alpha + 19600 \cdot \beta + 0 \cdot z_0 = 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 7{,}730 \\ \alpha = 0{,}125 \\ \beta = 0{,}0357 \end{cases}$$

Deci ecuatia planului de referintã (Π) este: **z = 7,73 + 0,125 x + 0,0357 y**

sau se poate scrie de forma canonicã: A x + B y + C z + D = 0 adicã: **0,125 x + 0,0357 y - z + 7,73 = 0**

Abaterile de la planeitate vor putea fi calculate ca distanţe de la punctele de mãsurã la planul (Π) cu formula:

$$a_i = \frac{A \cdot x_i + B \cdot y_i + C \cdot z_i + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Aplicând aceastã formulã de calcul pentru toate cuplurile (x_i, y_i, z_i) date de TAB. 1 s-au determinat abaterile faţã de planul definit prin metoda celor mai mici pãtrate (Tab. 2):

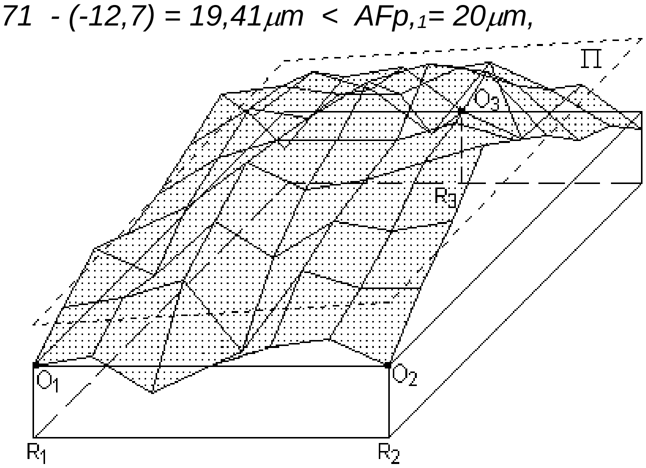
Tabelul 2

x → *y ↓*	*-40*	*-30*	*-20*	*-10*	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*
-30	-1,79	-0,05	1,67	-1,58	-1,84	-1,11	-0,38	-0,64	0,99
-20	-3,08	0,65	-1,61	1,12	1,85	2,59	0,33	1.06	-0,20
-10	-6,37	2,35	4,09	5,82	3,56	1,29	1,03	0,77	1,50
0	-2,67	-5,93	-0,20	2,53	3,27	5,00	-1,25	-4,52	**-12,7**
10	-4,96	2,76	3,50	3,24	2,97	**6,71**	1,44	-2,81	-4,08
20	-6,26	-9,52	2,21	4,94	4,68	5,41	-0,85	-2,11	-2,37
30	-3,55	0,18	2,91	6,65	2,38	-1,87	-2,14	-2,40	-1,66

Analizând aceste date se constatã cã abaterea limitã de planitate definitã ca diferentã a abaterilor limitã în raport cu planul de referintã (Π), definit prin metoda celor mai mici pãtrate, este:

$AFp_{,2} = 6{,}71 - (-12{,}7) = 19{,}41 \mu m < AFp_{,1} = 20 \mu m,$

Fig. 4



În Fig. 4 este realizatã reprezentarea graficã a acestor abateri de planeitate ale piesei studiate, fiind de remarcat urmãtoarele elemente:

- R_1 , R_2 si R_3 sunt punctele de contact cu cele trei reazeme reglabile;
- În punctele O_1, O_2 si O_3 abaterile mãsurate sunt nule, $O_1O_2O_3$ fiind primul plan de referinţã;
- Π este planul de referinţã definit prin metoda celor mai mici pãtrate.

3 METODA PLANULUI DEFINIT PRIN REZOLVARE MATRICEALÃ (MATLAB).

Considerãm setul de date din Tab 1 care pot fi interpretate ca fiind coordonatele de înãlţime (z) ale unui plan având ecuaţia: $z = a\,x + b\,y + c$

Aceastã ecuaţie se poate scrie pentru cele 7 x 9 = 63 combinaţii de coordonate x-y formându-se deci un sistem având 63 ecuaţii şi 3 necunoscute (a, b, c):

Ec. 1 $-40\,a - 30\,b + c = 0$
Ec. 2 $-40\,a - 20\,b + c = -1$
…………………
Ec. 62 $40\,a + 20\,b + c = 11$
Ec. 63 $40\,a + 30\,b + c = 12$

Vom considera cã acesta este un sistem matriceal de tipul $A \cdot Nec = B$
Unde: A = este matricea cu 3 coloane şi 63 linii a coeficienţilor necunoscutelor;
Nec = este vectorul coloanã al celor 3 necunoscute (a, b, c);
B = este vectorul coloanã al termenilor liberi.
Secvenţa de program MATLAB necesarã pentru rezolvarea acestui sistem poate fi urmãtoarea:

```
A1 = [-40 -30 1;-40 -20 1;-40 -10 1;-40 0 1;-40 10 1;-40 20 1;-40 30 1]
A2 = [-30 -30 1;-30 -20 1;-30 -10 1;-30 0 1;-30 10 1;-30 20 1;-30 30 1]
A3 = [-20 -30 1;-20 -20 1;-20 -10 1;-20 0 1;-20 10 1;-20 20 1;-0 30 1]
A4 = [-10 -30 1;-10 -20 1;-10 -10 1;-10 0 1;-10 10 1;-10 20 1;-10 30 1]
A5 = [0 -30 1;0 -20 1;0 -10 1;0 0 1;0 10 1;0 20 1;0 30 1]
A6 = [10 -30 1;10 -20 1;10 -10 1;10 0 1;10 10 1;10 20 1;10 30 1]
A7 = [20 -30 1;20 -20 1;20 -10 1;20 0 1;20 10 1;20 20 1;20 30 1]
A8 = [30 -30 1;30 -20 1;30 -10 1;30 0 1;30 10 1;30 20 1;30 30 1]
A9 = [40 -30 1;40 -20 1;40 -10 1;40 0 1;40 10 1;40 20 1;40 30 1]
A = [A1;  A2;  A3;  A4;  A5;  A6;  A7;  A8;  A9]
C1 = [0  -1  -4  0  -2  -3  0]          C2 = [3  4  6  -2  7  -5  5]
C3 = [6  3  9  5  9  8  9 ]             C4 = [4  7  12  9  10  12  14]
C5 = [5  9  11  11  11  13  11]         C6 = [7  11  10  14  16  15  8]
C7 = [9  10  11  9  12  10  9 ]         C8 = [10  12  12  7  9  10  10]
C9=[12 12 14 0 9 11 12]
C=[C1  C2  C3  C4  C5  C6  C7  C8  C9]
B = C '
```

$$Nec = A \setminus B \qquad \Rightarrow \quad Nec = \begin{pmatrix} 0.1264 \\ 0.0294 \\ 7.7302 \end{pmatrix}$$

Deci ecuaţia planului cãutat este: $\mathbf{z = 0.126\,x + 0.029\,y + 7.73}$

Obs.2 Deoarece matricea coeficienţilor este relativ mare (3 coloane şi 63 linii) s-a considerat cã este mai comod ca în primele 9 linii ale programului sã se scrie 9 matrici (A1, A2 …. A9) cu câte 7 linii.

În a 10-a linie a programului s-a realizat matricea A prin concatenarea matricilor A1…A9.

Obs.3 Deoarece matricea coloanã (vectorul coloanã) a termenilor liberi este relativ mare (63 termeni) s-a considerat cã este mai comod ca în liniile 11 … 19 ale programului sã se scrie 9 matrici linie (C1, C2 …. C9) cu câte 7 linii.

În a 20-a linie a programului s-a realizat matricea linie C cu 63 termeni, prin concatenarea matricilor C1…C9.

Matricea coloanã (vectorul coloanã) B s-a obţinut ca tanspusã a matricei linie C (linia 21 a programului)

Obs.4 În ultima linie a programului s-a calculat matricea necunoscutelor prin metoda de împãrţire la stânga a matricilor.

4. CONCLUZII

Metoda planului definit de trei puncte alese arbitrar are urmatoarele avantaje şi dezavantaje:

Avantajele metodei

- metoda este rapidã si foarte simplã;
- metoda nu necesitã calcule;
- metoda este foarte bunã pentru piese care au suprafaţa de rezemare neprelucratã.

Dezavantajele metodei

- planul de referinţã nu este planul adiacent , definit conform SR EN ISO 1101-2017;
- planul de referinţã este definit prin trei puncte alese arbitrar deci este posibil ca prin operaţii de mãsurare diferite (la producatori şi beneficiari) sã se obţinã rezultate diferite.

Metoda planului definit prin teoria celor mai mici pãtrate are urmatoarele avantaje şi dezavantaje:

Avantajele metodei

- metoda este caracterizatã printr-o foarte bunã repetabilitate şi prin aplicarea sa corectã la producãtori şi beneficiari se pot obtine rezultate identice;
- metoda conduce de regulã la abateri minime în comparatie cu alte metode;
- existã programe de calcul specializate care efectueazã prelucrarea rapidã a datelor şi reprezentarea lor graficã (de exemplu pentru aceastã problemã a fost folosit programul “METROLOGIE - Utilitaire de metrologie generale” - Burget Jean Michel - Bayonne - 1996).

Dezavantajul metodei

- planul de referinţã definit prin metoda celor mai mici pãtrate nu este un plan adiacent, definit conform SR EN ISO 1101-2017.

Metoda planului definit prin rezolvare matricealã (MATLAB) conduce la cea mai bumã precizie de calcul.

Ca observaţie, ecuaţia obţinutã prin rezolvarea matricealã a sistemului de ecuaţii (**z = 0.126 x + 0.029 y + 7.73**) este foarte asemãnãtoare cu ecuaţia **z = 0.125 x + 0.035 y + 7.73** , obţinutã prin metoda celor mai mici pãtrate.

BIBLIOGRAFIE

[1] – “MATLAB – calcul numeric – graficã – aplicaţii” – M. Ghinea ş.a., Editura TEORA, Bucureşti, 1995

[2] – “EXCEL 5.0 – cu aplicaţii în management” – D. Somnea ş.a., Editura Tehnicã, Bucureşti, 1994

[3] – “Probleme de toleranţe şi control dimensional” – Şt. Rusu ş.a. , Editura BREN, Bucuresti, 2002