INFLUENŢA RIGIDITĂŢII LA ÎNTINDERE ASUPRA VIBRAŢIILOR TRANSVERSALE ALE CABLURILOR

DIACONU Cristian, dr.ing., director general S.C. Rutexpert S.R.L. Bucureşti,
Str. Govodarva, nr. 11, sect. 6

PAVEL Cristian, prof.dr.ing., Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti
B-dul Lacul Tei, nr.122-124, sect. 2

ABSTRACT

Steel or other materials (copper, aluminum) wire ropes, stressed and piles suspended, are used to transport materials or people or electric energy. Under the action of the periodical, working or accidental, (hoar frost, wind) loads, may appear forced transverse vibrations. In their study, determination of natural frequencies is necessary.

In case of enough distance between anchorage points it is better to make an exactly appreciation of the transverse vibrations, firstly of fundamental pulsation, considering also the variation of the wire rope's length and tensional stiffness.

1. DEDUCEREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE CU DERIVATE PARŢIALE A VIBRAŢIEI TRANSVERSALE

Pentru studiul micilor oscilaţii ale cablurilor, asimilate cu fire tensionate, se consideră firul fixat la extremităţile O şi B, supus la întindere cu o forţă iniţială, S_0 , suficient de mare (fig. 1).

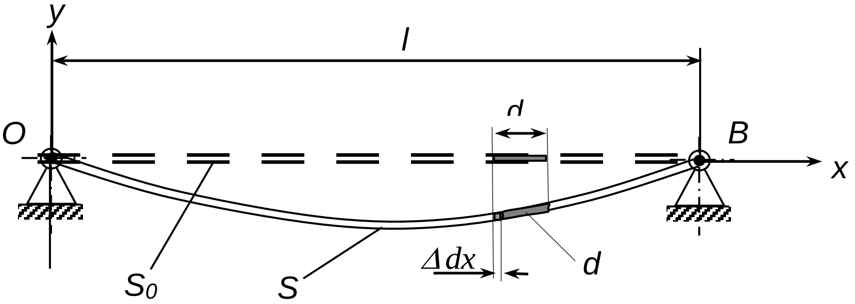

Fig. 1

Se izolează din fir un tronson elementar de mas dm şi lungime dx, care, în urma deformaţiei firului, se alungeşte cu mrimea Δdx.

Ca urmare a alungirii elastice a tronsonului, lungimea acestuia devine $dx_1 = dx + \Delta dx$. Se pot scrie relaţiile geometrice (fig. 2):

$$dx_1 \cos\alpha = dx \tag{1}$$

sau,

$$(dx + \Delta dx)\cos\alpha = dx$$

$$\Delta dx = dx - dx\cos\alpha = dx(1-\cos\alpha) \tag{2}$$

Pentru unghiuri mici $\left(\alpha \le 5^0...6^0\right)$, $\cos\alpha \cong 1$ şi $1-\cos\alpha \cong \frac{\alpha^2}{2}$, $\sin\alpha \cong tg\alpha \cong \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

unde $y = y(x,t)$ este forma deformată a firului.
Rezultă:

$$\Delta dx \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3}$$

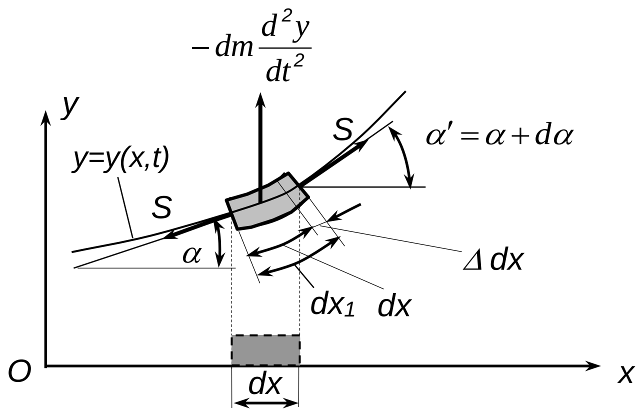

Fig. 2

Alungirea întregului fir va fi:

$$\Delta l = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{4}$$

Alungirea firului produce în acesta o forţă suplimentară de întindere dată de relaţia:

$$\Delta S = \frac{EA\Delta l}{l} = \frac{EA}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{5}$$

Efortul total din fir, presupus constant, va fi:

$$S = S_0 + \Delta S \tag{6}$$

Aplicând principiul lui D'Alembert pentru tronsonul încărcat cu forţele din figura 2, rezultă ecuaţia:

$$-dm\frac{d^2y}{dt^2} + S\sin(\alpha + d\alpha) - S\sin\alpha = 0, \tag{7}$$

sau:

$$-dm\frac{d^2y}{dt^2} + S\,d\alpha = 0 \tag{8}$$

$$dm = \rho A dx \qquad (9)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(10)

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (11)$$

Dar

$$S = S_0 + \Delta S = S_0 + \frac{EA}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (12)$$

Ecuaţia diferenţială a vibraţiei transversale devine:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left[S + \frac{EA}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (13)$$

2. DETERMINAREA PULSAŢIEI PROPRII MINIME

Pentru determinarea pulsaţiei proprii minime a vibraţiei transversale, se va utiliza metoda lui Galerkin.

Notând ecuaţia (13), cu derivate parţiale,

$$E(x,y,t) = 0 \qquad (14)$$

soluţia, în cazul vibraţiilor în regim permanent, se caută sub forma:

$$y = X(x)T(t), \qquad (15)$$

unde $X(x)$ este o funcţie numai de variabila *x*, iar $T(t)$ este o funcţie numai de timpul *t*.

Introducând relaţia (15) în ecuaţia (14) se obţine ecuaţia diferenţială a amplitudinilor, de forma:

$$E_1(X, p) = 0, \qquad (16)$$

unde p este pulsaţia proprie, necunoscută, a vibraţiei.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (16) se va utiliza metoda Galerkin. Soluţia aproximativă se exprimă sub forma:

$$y_1 = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} T(t) \qquad (17)$$

în care funcţia $X_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$, cunoscută, îndeplineşte condiţiile la limită ale problemei.

Eroarea dată de soluţia aproximativă, în raport cu soluţia exactă, este:

$$\varepsilon(x,p) = E(y_1, x, t) \neq 0 \qquad (19)$$

Metoda Galerkin impune soluţiei condiţia ca media erorii $\varepsilon(x,p)$ ponderată cu funcţia dată de soluţia aproximativă (17), pe un interval (0 , l) să fie nul:

$$\varepsilon(x,p) X_1(x) dx = 0 \qquad (20)$$

Se demonstrează, [1], că soluţia obţinută aproximează satisfăcător ecuaţia dată.

Pentru cazul considerat, înlocuind soluţia (17) în (20) şi după unele simplificări, rezultă:

$$\int_0^l \left\{\rho_l a_1 \sin\frac{\pi x}{l}\ddot{T} + \left[S_0 + \frac{EA}{2l}T\int_0^l a_1^2 \frac{\pi^2}{l^2} T^2 \cos^2\frac{\pi x}{l} dx\right] a_1 \frac{\pi^2}{l^2}\right\} \sin\frac{\pi x}{l} dx = 0$$

Calculând integralele

$$\int_0^0 \sin\frac{\pi x}{l}dx = \frac{2l}{\pi};\ \int_0^l \cos^2\frac{\pi x}{l}d\,x = \int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}d\,x = \frac{l}{2},$$

se obţine ecuaţia diferenţială

$$\ddot{T} + \frac{S_0}{\rho A}\frac{\pi^2}{l^2}T + \frac{E\,A}{4\rho A}a_1^2\frac{\pi^4}{l^4}T^3 = 0.$$

Cu notaţiile

$$\omega^2 = \frac{S_0}{\rho A}\frac{\pi^2}{l^2} \text{ şi } \varepsilon = \frac{E\,A}{4\rho A}a_1^2\frac{\pi^4}{l^4}, \text{ e}$$

ecuaţia diferenţială devine:

$$\ddot{T} + \omega^2 T + \varepsilon T^3 = 0,$$

cu condiţiile iniţiale $T(0)=1;\ \dot{T}(0)=0$.

S-a obţinut o ecuaţie diferenţială neliniară, cu caracteristică de rigiditate cubică, pentru rezolvarea căreia se poate utiliza metoda micului parametru. Sub forma prezentată mai sus, ecuaţia este tratată în multe lucrări de specialitate. Utilizând [6] şi oprindu-ne la aproximaţia de ordinul doi, pulsaţia proprie se scrie:

$$p = \sqrt{\omega^2 + \frac{3\varepsilon A^2}{4}} = \sqrt{\frac{S_0}{\rho A}\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{3}{4}\frac{E\,A}{4\rho A}\frac{\pi^4}{l^4}a_1^2} \approx \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{S_0}{\rho A}}\left(1 + \frac{3E\,A}{32S_0}\frac{\pi^2}{l^2}a_1^2\right)$$

3. APLICAŢIE NUMERICĂ

Un cablu purtător, din oţel, pentru tracţiunea feroviară , are secţiunea $A = 50\,mm^2$, masa liniară $\rho = 0{,}4\,kg/m$, forţa de întindere iniţială $S_0 = 20\,kN$, distanţa dintre stâlpi $l = 50m$.

Pulsaţia proprie fundamentală, fără luarea în calcul a rigidităţii axiale a cablului este:

$$\omega = \sqrt{\frac{S_0}{\rho A}\frac{\pi^2}{l^2}} = \sqrt{\frac{20.000\cdot\pi^2}{0{,}4\cdot 50^2}} = 14{,}05\ s^{-1}$$

Variaţia pulsaţiei fundamentale, datorat rigidităţii axiale a cablului este:

$$\Delta p = \frac{3E\,A}{32S_0}\frac{\pi^2}{l^2}a_1^2 = \frac{3\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 50\cdot 10^{-6}\cdot\pi^2}{32\cdot 20.000\cdot 50^2}0{,}2^2 = 0.23$$

Pulsaţia proprie, corectată cu mărimea datorată rigidităţii axiale a cablului, este:

$$p = \omega(1 + \Delta p) = 14{,}05 + 0{,}23 = 14{,}28\ s^{-1}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Babakov,I.,M., *Teoria kolebanii*, Izd. Nauka, Moskva, 1965

[2] Balcu, I., *Vibraţii ale sistemelor mecanice*, Edit. Lux LIBRIS, Braşov, 1996

[3] Bratu, P., *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Edit. tehnic, Bucureşti, 2000

[4] Den-Hartog, J., P., *Mechanical Vibrations*,Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva, 1969 (în lb. rus)

[5] Munteanu, M., *Introducere în dinamica maşinilor vibratoare*, Edit. Acad., Bucureşti, 1986

[6] Silaş, Gh., Rdoi, M., Brîndeu, L., Klepp, H., Hegedus, A., *Culegere de probleme de Vibraţii mecanice*, vol II, Edit. tehnic, Bucureşti, 1973

[7] Svetliţkii, V., A., Stacenko, I.,V., *Sbornik zadaci po teorii kolebanii*, Vîsşaia şkola, Moskva, 1979