SOLUŢII APROXIMATIVE PENTRU UNDE TERMICE

RUXANDRA ILIE, preparator univ. Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti.

In this paper we analyse the phenomenon of propagation of heat with finite speed, in finite bar of Cattaneo's type. In contrast to the classical thermoelasticity, this theory makes use of modified version of the classical Fourier's law of theat conduction and leads to hyperbolic-type heat transport equation admitting finite thermal wave speed.

1. INTRODUCERE

Teoria clasică a conducţiei termice, arată că dacă un material bun conductor de căldură este supus la o perturbaţie termică (agitaţie termică), atunci efectele perturbaţiei pot fi simţite instantaneu la distanţe infinit de depărtate de sursă. Acest neajuns apare din cauza faptului că ecuaţia de transport a căldurii care stă la baza acestei teorii, este o ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic, care prezice o *viteză infinită* pentru semnale termice.

În decursul ultimelor decenii, din cauza acestui inconvenient fizic, au fost formulate diferite teorii nonclasice independente, unele din aceste teorii folosind versiuni modificate ale legii clasice lui Fourier de conducţie a căldurii.

2. CONDUCTOR RIGID DE TIP CATTANEO

În lucrare analizăm propagarea căldurii în bara rigidă, finită, de lungime l, omogenă şi izotropă, conductoare de căldură.

În acest scop, vom considera *ecuaţia de bilanţ a energiei interne* în absenţa surselor externe de căldură:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c}\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\ ,\ x \in [0,l],\ t > 0 \tag{1}$$

Legea generalizată de conducţie termică (legea constitutivă a conducţiei termice):

$$\tau \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + q(x,t) = -k\ grad\, T(x,t),\ x \in [0,l],\ t > 0 \tag{2}$$

unde, $T(x,t)$ şi $q(x,t)$ sunt funcţii necunoscute care reprezintă temperatura respectiv fluxul de căldură în bară, în locul x la momentul t. Constantele pozitive k, ρ şi c sunt respectiv *coeficientul de conducţie termică*, *densitatea de material* şi *căldura specifică*. Constanta $\tau > 0$ este *timpul de relaxare termică* sau inerţia fluxului de căldură şi reprezintă timpul de întârziere de care are nevoie să se stabilizeze starea de conducţie termică într-un element de volum când gradientul de temperatură a fost aplicat brusc acestui volum.

3. PROBLEMA INIŢIALĂ ŞI LA LIMITĂ

Vom considera următoarea problemă iniţială şi la limită

- *Condiţii iniţiale*: $T(x,0) = T_0(x)$, (temperatura la momentul iniţial),

  $q(x,0) = q_0(x)$, (fluxul termic la momentul iniţial $t = 0$);
- *Condiţiile la limită*: $q(0,t) = q(l,t) = 0$.

Presupunând satisfăcute ipotezele de regularitate necesare, dacă eliminăm fluxul termic între ecuaţiile (1) şi (2), obţinem ecuaţia care guvernează fenomenul de propagare a căldurii în bară:

$$\tau \ddot{T}(x,t)+\dot{T}(x,t)=\frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad . \tag{3}$$

Ecuaţia (3) este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinal al doilea, lineară de tip hiperbolic.

Mărimea $v_T=\sqrt{\frac{k}{\rho c\tau}}$ reprezintă *viteza finită de propagare a căldurii* în bară, iar mărimea $a^2=\frac{k}{\rho c}>0$ apare în ecuaţia de propagare a căldurii de tip parabolic.

Dacă se dă fluxul termic $q(x,0)=q_0(x)$ atunci, potrivit ecuaţiei (1), putem scrie:

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=-\frac{1}{\rho c}\frac{\partial q(x,0)}{\partial x}=-\frac{1}{\rho c}\frac{\partial q_0(x)}{\partial x} \tag{4}$$

Considerând ecuaţia (2) şi folosind condiţiile la limită, avem:

$$\left[\tau\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}+q(x,t)\right]_{x=0;\ x=l}=-k\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0;\ x=l} .$$

Din $q(0,t)=q(l,t)=0$, avem $\frac{\partial T(x,0)}{\partial x}=0$ şi $\frac{\partial T(x,l)}{\partial x}=0$, adică viteza de variaţie este nula pe frontieră.

În consecinţă, vom avea:

- *Condiţii iniţiale:* $T(x,0)=T_0(x)$
- *Condiţii la limită:* $\frac{\partial T(x,0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial T(x,l)}{\partial x}=0$
- *Condiţii de racordare:* $T_0'(0)=T_0'(l)=0$.

Vom căuta soluţii de forma $T(x,t)=X(x)\cdot\Theta(t)\neq 0$ (potrivit metodei Fourier de separare a variabilelor).

Înlocuind în (3), avem

$$\tau X(x)\ddot{\Theta}(t)+X(x)\dot{\Theta}(t)=a^2X''(x)\Theta(t)\,|:X(x)\Theta(t)$$

şi deci, după separarea variabilelor, obţinem:

$$\tau\frac{\ddot{\Theta}(t)}{\Theta(t)}+\frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)}=a^2\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

a) Dacă alegem constanta $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda\neq 0$, vom obţine următoarea problemă bilocală

$$X''(x)+\frac{\lambda^2}{a^2}X(x)=0;\quad X'(0)=X'(l)=0 \tag{5}$$

Ecuaţia diferenţială (5) are soluţia generală de forma:

$$X(x)=C\cos\frac{\lambda}{a}x+D\sin\frac{\lambda}{a}x .$$

Din condiţiile bilocale se determină necunoscuta λ. Astfel de obţin valorile proprii

$\lambda_k = \dfrac{k\pi a}{l}, \quad k = 1, 2\ldots$, care nu depind de timpul de relaxare τ . Funcţiile proprii corespunzătoare au forma $$X_k(x) = C_k \cos\frac{k\pi}{l}x,\ k = 1, 2\ldots$$

b) Dacă $\lambda = 0$, atunci $X''(x) = 0$, ceea ce implică faptul că $X'(x) = C_0$ şi $X(x) = C_0 x + C_1$. Din (5), adică $X'(0) = 0$, obţinem $X(x) = const$.

c) Dacă constanta $-\lambda^2$ este aleasă pozitivă, atunci obţinem soluţia banală $X(x) = 0$.

În concluzie, *valorile proprii* au forma

$$\lambda_k = \frac{k\pi a}{l}, \quad k = 0, 1, 2\ldots \quad \text{(nu depind de timpul de relaxare } \tau \text{)}. \tag{6}$$

iar *funcţiile proprii* corespunzătoare sunt

$$X_k(x) = C_k \cos\frac{k\pi}{l}x,\ k = 0, 1, 2\ldots \tag{7}$$

Fie ecuaţia $\tau\ddot{\Theta}(t) + \Theta(t) + \lambda_k{}^2\Theta(t) = 0 \quad k = 1, 2\ldots$. Dacă se caută soluţii de forma $\Theta(t) = e^{rt}$, atunci obţinem

$$\tau r^2 + r + \lambda_k{}^2 = 0 \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

i) Pentru $k = 1, 2\ldots$, obţinem soluţiile:

$$r_k^{(1)} = -\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau}\sqrt{1 - 4\tau\lambda_k{}^2} = \frac{1}{2\tau}\left[-1 - \left(1 - 4\tau\lambda_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$r_k^{(2)} = -\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau}\sqrt{1 - 4\tau\lambda_k{}^2} = \frac{1}{2\tau}\left[-1 + \left(1 - 4\tau\lambda_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{8}$$

şi atunci rezultă

$$\Theta_k(t) = A'_k e^{r_k^{(1)} t} + B'_k e^{r_k^{(2)} t} \tag{9}$$,

unde $\lambda_k = \dfrac{k\pi a}{l} = \dfrac{k\pi}{l}\dfrac{k}{\rho c} = \dfrac{k^2\pi}{l\rho c}$ şi nu depinde de τ .

***Observaţia* 1.** Folosind dezvoltarea binomială, putem scrie evaluările:

$$r_k^{(1)} = \frac{1}{2\tau}\left[-1 - \left(1 - 2\tau\lambda_k{}^2 + 2\tau^2\lambda_k{}^4 + \ldots\right)\right] = -\frac{1}{\tau} + \lambda_k{}^2 + O(\tau)$$

, pentru $\tau \to 0$

$$r_k^{(2)} = \frac{1}{2\tau}\left[-1 + \left(1 - 2\tau\lambda_k{}^2 + 2\tau^2\lambda_k{}^4 + \ldots\right)\right] = -\lambda_k{}^2 + O(\tau)$$

Aşadar, soluţia (9) devine

$$\Theta_k(t) = A'_k e^{\left[-\frac{1}{\lambda} + \lambda_k{}^2 + O(\tau)\right]t} + B'_k e^{\left[\lambda_k{}^2 + O(\tau)\right]t} \tag{10}$$

Pentru $\tau \to 0_+$, obţinem următoarea exprimare a soluţiei

$$\Theta_k(t) = B'_k e^{-\lambda_k^2 t} \tag{11}$$

ii) Pentru $k=0$ avem $r_0^{(1)} = -\frac{1}{\tau}$ şi $r_0^{(2)} = 0$ şi soluţia are forma

$$\Theta_0(t) = A_0 e^{-\frac{1}{\tau}} + B_0 \tag{12}$$

În continuare funcţiile proprii au forma:

$$T_k(x,t) = X_k(x)\Theta_k(t) = \left(A_k e^{r_k^{(1)}} + B_k e^{r_k^{(2)}}\right)\cos\frac{4\pi}{l}x\,, \quad k=1,2\ldots \tag{12}$$

$T_0(x,t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + B_0$, A_k, B_k, A_0, B_0 constante încă necunoscute

Funcţia

$$T_k(x,t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{r_k^{(1)}} + B_k e^{r_k^{(2)}}\right)\cos\frac{4\pi}{l}x \tag{13}$$

Trebuie să verifice condiţiile iniţiale şi ecuaţia de conservare a energiei interne:

$$\rho c\dot{T} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Admiţând că seria (14) poate fi derivată termen cu termen în raport cu x şi t , obţinem:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c\left[-\frac{1}{\tau}A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k r_k^{(1)} e^{r_k^{(1)}} + B_k r_k^{(2)} e^{r_k^{(2)}}\right)\cos\frac{4\pi}{l}x\right] \tag{14}$$

Din (14), prin integrare în raport cu x, avem:

$$q(x,t) = \frac{\rho c}{\tau}A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}x - \rho c\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k r_k^{(1)} e^{r_k^{(1)}} + B_k r_k^{(2)} e^{r_k^{(2)}}\right)\frac{l}{k\pi}\sin\frac{4\pi}{l}x + C_0$$

Din condiţiile la limită avem $0 = q(0,t) = C_0$ şi $q(l,t) = \frac{\rho c l}{\tau}A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, deci $A_0 = 0$.

Aşadar, pentru câmpul de temperatură rezultă expresia

$$T(x,t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{1}{2\tau}\left[-1-\left(1-4\tau\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]t} + B_k e^{\frac{1}{2\tau}\left[-1+\left(1-4\tau\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]t}\right)\cos\frac{4\pi}{l}x \tag{15}$$

iar pentru fluxul termic soluţia are forma

$$q(x,t) = \rho c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k e^{\frac{1}{2\tau}\left[\left(1-4\tau\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]t} + \tilde{B}_k e^{\frac{1}{2\tau}\left[1+\left(1-4\tau\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]t}\right)\frac{l}{k\pi}\sin\frac{4\pi}{l}x \tag{16}$$

unde

$$\tilde{A}_k = \frac{l}{\pi k}\cdot\frac{1}{2\tau}\left(-1-\sqrt{1-4\tau\lambda_k^2}\right)\cdot A_k \quad \text{şi} \quad \tilde{B}_k = \frac{l}{\pi k}\cdot\frac{1}{2\tau}\left(-1+\sqrt{1-4\tau\lambda_k^2}\right)\cdot B_k, \quad k=1,2,\ldots \tag{17}$$

Datorită condiţiilor iniţiale, pentru câmpul de temperatură, obţinem

$$T_0(x) \equiv T(x,0) = B_0 + \sum_{k \ge 1} (A_k + B_k) \cos \frac{\pi k}{l} x .$$

Atunci, constantele B_0, A_k şi $B_k, k = 1, 2, ...$ sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei $T_0(x)$, care trebuie să verifice relaţiile:

$$B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l T_0(x) dx \qquad \text{şi} \qquad A_k + B_k = \frac{2}{l} \int_0^l T_0(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx, \quad k = 1, 2, ... \tag{18}$$

Folosind (4), putem scrie

$$-\frac{1}{\rho c} \frac{\partial q_0}{\partial x}(x) = \frac{\partial T}{\partial t}(x,0) = \sum_{k \ge 1} \left(A_k r_k^{(1)} + B_k r_k^{(2)} \right) \cos \frac{\pi k}{l} x ,$$

de unde, obţinem

$$A_k r_k^{(1)} + B_k r_k^{(2)} = -\frac{2}{\rho c l} \int_0^l \frac{\partial q_0(x)}{\partial x} \cos \frac{\pi k}{l} x dx , \tag{19}$$

Relaţiile (18) şi (19) determină unic constantele A_k şi B_k iar cu ajutorul relaţiilor (17) se determină constantele $\tilde{A}_k$ şi $\tilde{B}_k$. În consecinţă soluţia problemei iniţiale şi la limită este complet determinată.

4. CONCLUZII

1). În cazul când $\tau \to 0+$, atunci $r_k^{(1)} \to -\infty$ şi $r_k^{(2)} = -\lambda_k^2$ şi deci câmpul de temperatură şi fluxul termic sunt determinate de relaţiile următoare

$$T(x,t) \approx B_0 + \sum_{k \ge 1} B_k e^{-\lambda_k^2 t} \cos \frac{\pi k}{l} x \tag{20}$$

$$q(x,t) \approx -\rho c \sum_{k \ge 1} \tilde{B}_k e^{-\lambda_k^2 t} \sin \frac{\pi k}{l} x , \tag{21}$$

unde, potrivit relaţiei (17), avem

$$\tilde{B}_k = -\frac{l}{\pi k} \lambda_k^2 B_k , \tag{22}$$

Din expresia (20), a câmpului termic, observăm că armonicele $B_k \cos \frac{\pi k}{l} x$ sunt amortizate în timp de factorul $e^{-\lambda_k^2 t}$ şi pentru $t \to \infty$, avem $\lim_{t \to \infty} T(x,t) \approx B_0$, care reprezintă temperatura medie de la momentul iniţial, în bara de lungime l, conductoare de căldură.

Soluţia scrisă sub forma (20) reprezintă *soluţia problemei clasice a propagării căldurii*, când legea constitutivă (*), a fluxului termic, este tocmai *legea clasică a lui Fourier*, $\boldsymbol{q} = -k \, grad \, T(x,t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0,l], t > 0 ,$$

cu condiţia iniţială, $T(x,0) = T_0(x)$ şi condiţiile la limită $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = 0$.

Aşadar, pentru t suficient de mare, dacă fluxul termic este nul în orice secţiune $x\in[0,l]$ a barei, atunci temperatura în orice punct al barei tinde să se stabilizeze către valoarea dată de temperatura medie în bară de la momentul iniţial, adică $\bar{T}(0)=\frac{1}{l}\int_0^l T_0(x)dx$.

2). Fie $\lambda_n^2=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{\rho c}$, $n\in\boldsymbol{N}^*$. Atunci, $\beta_n^2=1-4\tau\lambda_n^2=1-4\tau^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}v_T^2$. Din condiţia $1-4\tau\lambda_n^2=0$, rezultă $\tau=\frac{1}{4\lambda_n^2}=\frac{\rho c l^2}{4\pi k}\cdot\frac{1}{n^2}$ şi, în consecinţă, există $n_0\in\boldsymbol{N}^*$ a.î. să avem

$$\beta_n^2=1-4\tau\lambda_n^2>0, n=1,2,...,n_0 \qquad \text{respectiv,} \qquad \beta_n^2=1-4\tau\lambda_n^2<0, n=n_0+1,n_0+2,...,$$

Pentru valorile fixate l,ρ,c,k (deoarece λ_n nu depinde de timpul de relaxare τ) rezultă $\lambda_1<\lambda_2<....<\lambda_n<...$ şi fie τ^* *valoarea critică* adică, valoarea cea mai mare pentru care orice τ cu $\tau>\tau^*$ avem $\beta_n^2<0$ $(n=n_0+1,n_0+2,...)$

Pentru $n<n_0$ rezultă că $r_n^{(1)}=\frac{1}{2\tau}(-1-\beta_n)$ şi $r_n^{(2)}=\frac{1}{2\tau}(-1+\beta_n)$ sunt numere reale iar, pentru $n>n_0$ deducem că $r_n^{(1)}=\frac{1}{2\tau}(-1-i\beta_n)$ şi $r_n^{(2)}=\frac{1}{2\tau}(-1+i\beta_n)$ sunt numere complexe care au părţile imaginare nenule, egale cu $\frac{\beta_n}{2\tau}\neq 0$.

Aşadar, câmpurile de temperatură şi fluxulul termic pot fi exprimate cu relaţiile:

$$T(x,t)=B_0+\sum_{k=1}^{n_0}(A_k e^{r_k^{(1)}t}+B_k e^{r_k^{(2)}t})\cos\frac{\pi k}{l}x+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\tau}t}(A_k e^{-i\frac{\beta_k}{2\tau}t}+B_k e^{i\frac{\beta_k}{2\tau}t})\cos\frac{\pi k}{l}x.$$

şi

$$q(x,t)=-\rho c\left[\sum_{k=1}^{n_0}(\tilde{A}_k e^{r_k^{(1)}t}+\tilde{B}_k e^{r_k^{(2)}t})\sin\frac{\pi k}{l}x+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\tau}t}(\tilde{A}_k e^{-i\frac{\beta_k}{2\tau}t}+\tilde{B}_k e^{i\frac{\beta_k}{2\tau}t})\sin\frac{\pi k}{l}x\right].$$

Vom observa că armonicele

$$e^{-\frac{1}{2\tau}t}(\tilde{A}_k e^{-i\frac{\beta_k}{2\tau}t}+\tilde{B}_k e^{i\frac{\beta_k}{2\tau}t})\cos\frac{\pi k}{l} \quad \text{şi, respectiv} \quad e^{-\frac{1}{2\tau}t}(\tilde{A}_k e^{-i\frac{\beta_k}{2\tau}t}+\tilde{B}_k e^{i\frac{\beta_k}{2\tau}t})\sin\frac{\pi k}{l},$$

obţinute pentru $n>n_0$, suferă oscilaţii în raport cu timpul şi sunt atenuate cu factorul de atenuare $e^{-\frac{1}{2\tau}t}$.

5. BIBLIOGRAFIE.

[1]. C.Cattaneo, *Sulla conduzione del calore*, Atti del Seminario Matem. Fis. Univ. di Modena, **3**,3-21,1948.

[2]. D.Ieşan, *Teoria termoelasticităţii*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti 1979.

[3]. N. Simion, *Unde termice în solide*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2004.