

ASPECTE PRIVIND SOLICITĂRILE DE CONTACT CARACTERISTICE ANGRENAJELOR CICLOIDALE

Prep. Ing. POPOVICI Aristia - Ioana , U.T.C.B. – Facultatea de Utilaj Tehnologic

ABSTRACT

In this paper are presented the theoretical study of the hertzian tensions contact in particular case of cycloidal teeth when are used cycloid gears with bolts.

Reductorul planetar cu angrenaje cicloidale cu bolțuri are, din punct de vedere funcțional, două componente principale: angrenajul planetar cicloidal cu bolțuri și cuplajul transversal homocinetic (fig. 1).

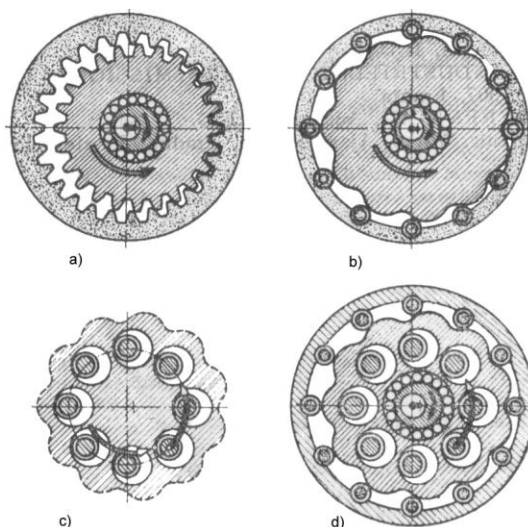


Fig. 1

Angrenajul planetar cicloidal cu bolțuri este alcătuit din roata satelit și bolțurile plasate echidistant în carcasă (roata centrală fixă).

Angrenajele cicloidale cu bolțuri sunt cazuri particulare ale angrenajelor cicloidale, acestea având ca profil al dinților curbe cicloidale, reciproc înfășurabile.

Cicloida este curba descrisă de un punct din planul (π_1) al unui cerc (C_1) în rostogolirea sa fără alunecare peste un alt cerc (C_2) considerat în planul fix (π_2) (fig. 2).

Punctele (M_{1i}), situate în semiplanul mobil π_{1i} , descriu cicloide scurtate (K_s), punctele (M_{1e}), situate în semiplanul mobil π_{1e} , descriu cicloide alungite (K_a), iar punctele (M_1), situate pe cercul mobil (C_1), descriu cicloide normale (K_n).

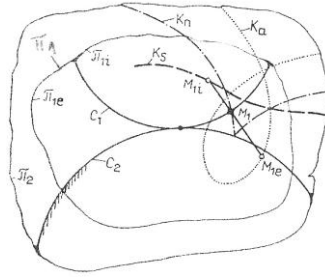


Fig. 2

În funcție de poziția relativă a cercului mobil (generator) față de cercul fix (bază), cicloidele se împart în: epicloide - cercul mobil generator (C_1) cu partea sa exterioară (fig. 6.3, a) sau interioară (fig. 3, b) se rostogolește fără alunecare în exteriorul cercului fix (C_2); și hipocicloide - cercul mobil (C_1) se rostogolește cu partea sa exterioară în interiorul cercului fix (C_1) (fig. 3, c și d).

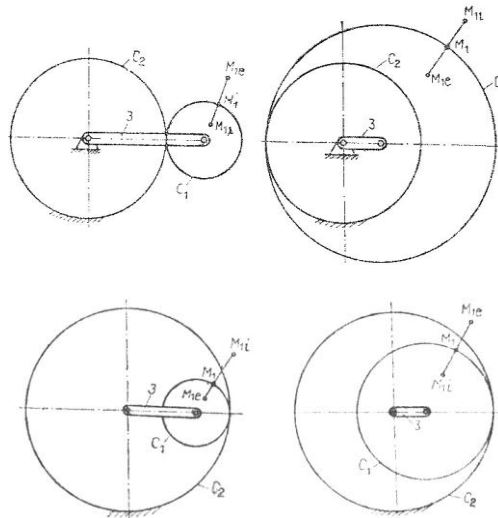


Fig. 3

Ținând seama de cele două criterii de clasificare a cicloidelor, ca urmare, se disting epicloide (fig. 3, a și b) și hipocicloide (fig. 3, c și d) normale (descrise de punctele M_1), scurtate (descrise de punctele M_{1i}) și alungite (descrise de punctele M_{1e}).

În practică, profilului dinților satelitului este realizat după o cicloidă scurtată (K'_2) (fig. 4).

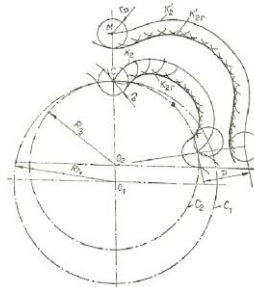


Fig. 4

Profilul real al dintelui rezultă ca o curbă echidistantă (K'_{2r}), la curba generată de punctul M situat în planul centroidei auxiliare, la o distanță 'p' față de punctul generator (C) aflat pe centroidă auxiliară.

Avem în acest caz angrenajul cicloidal cu deplasare de profil ($p \neq 0$).

Avantajul angrenajelor cicloidale cu deplasare de profil este acela că permite transmiterea unei puteri mai mari (la $p > 0$ cresc diametrele bolțurilor cuplajului transversal).

Raza r_2 a roților de pe bolțurile cuplajului depinde de distanța dintre axe A și raza alezajului r_g , ($r_2 = r_g - A$) (fig. 5). Se observă că la același alezaj, raza r_2 a roților bolțurilor este mai mare la angrenajul deplasat deoarece distanța dintre axe este mai mică decât la angrenajul nedepus.

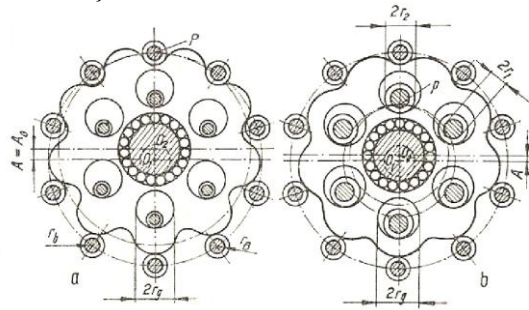


Fig. 5

Pentru generarea curbelor cicloidale cu deplasare de profil și cuantificarea elementelor geometrice a unor astfel de angrenaje se folosește schema din fig. 6 în care sunt înscrise următoarele notații:

- 1 – centroida roții cu bolțuri (mobilă);
- 2 – centroida roții dințate (fixe);
- R_1, R_2 – razele centroidelor roților;
- $R_1 + p$ – raza de dispunere a bolțurilor;
- Z – numărul de bolțuri;
- N – diferența între numărul de bolțuri și numărul de dinți;
- Z - n – numărul de dinți ai roții;
- N – număr întreg oarecare;
- m' – modulul angrenării centroidale ($p=0$);
- m – modulul angrenării deplasate ($p \neq 0$);
- A – distanța între axe;
- r_b – raza bolțurilor;
- ξ – deplasarea specifică a danturii;
- β – unghi care măsoară deplasarea punctului de contact I (c.i.r) al centroidelor R_1 și R_2 pe centroidă R_1 ;
- α – unghi care măsoară deplasarea c.i.r I pe centroidă R_2 ;

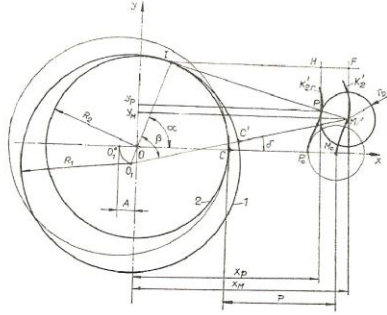


Fig. 6

Contactul caracteristic angrenajelor cicloidale

Abordarea problemelor legate de contactul dintre dinți și bolțurile angrenajului cicloidal implică cunoașterea geometriei profilului cicloidal al dintelui caracterizat prin razele de curbură caracteristice.

Raza de curbură a profilului teoretic se deduce din ecuațiile parametrice ale profilului teoretic și se calculează cu relația

$$\rho_T = R_1 \cdot \frac{(1 + \xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot \cos \beta)^{\frac{3}{2}}}{\xi^2 + Z - \xi \cdot (Z + 1) \cdot \cos \beta} \quad (1)$$

Cu notațiile

$$1 + \xi^2 = a; \quad 2 \cdot \xi = b; \quad \frac{\xi^2 + Z}{R_1} = c; \quad \frac{\xi \cdot (Z + 1)}{R_1} = d; \quad (2)$$

relația (1) devine:

$$\rho_T = \frac{(a - b \cdot \cos \beta)^{\frac{3}{2}}}{c - d \cdot \cos \beta} \quad (3)$$

Se observă că $\rho_T = \infty$ pentru

$$\cos \beta = \cos \beta_\infty = \frac{\xi^2 + Z}{\xi \cdot (1 + Z)} \quad (4)$$

ceea ce înseamnă că în punctul corespunzător lui $\beta = \beta_\infty$, profilul teoretic are un punct de inflexiune.

Raza de curbură a profilului real (fig. 7). Pentru porțiunea convexă

$$\rho_r = \rho_T - r_b \quad (5)$$

iar pentru porțiunea concavă

$$\rho_r = \rho_T + r_b \quad (6)$$

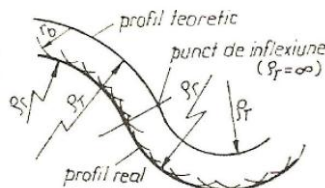


Fig. 7

Raza minimă a profilului teoretic. Din punctul de vedere al rezistenței la contact, este necesar a se cunoaște raza de curbură minimă a profilului pentru a putea determina eforturile la presiunea de contact maxime.

Valorile unghiului β , pentru care raza de curbură este minimă, se determină prin anularea derivatei expresiei razei de curbură în raport cu unghiul β

$$\frac{d\rho_T}{d\beta} = \frac{(a-b \cdot \cos \beta)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \beta \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (c-d \cdot \cos \beta) \cdot b - d \cdot (a - \cos \beta) \right]}{(c-d \cdot \cos \beta)^2} = 0 \quad (7)$$

Derivata $\frac{d\rho_T}{d\beta}$ este nulă pentru:

$$a) \beta = 0 \text{ (pe porțiunea concavă),} \quad (8)$$

$$b) \cos \beta = \frac{a}{b} = \frac{1+\xi^2}{2\xi}, \quad (9)$$

$$c) \frac{3}{2} \cdot (c-d \cdot \cos \beta) \cdot b - d \cdot (a - b \cdot \cos \beta) = 0. \quad (10)$$

Din relația (10) se determină valoarea unghiului $\beta = \beta_{\min}$ pentru care raza de curbură a profilului teoretic este minimă:

$$\cos \beta_{\min} = \frac{3c}{d} - \frac{2a}{b} \quad (11)$$

Conform notațiilor (2), rezultă

$$\cos \beta_{\min} = 3 \cos \beta_{\infty} - \frac{1+\xi^2}{\xi} \quad (12)$$

Raza de curbură minimă a profilului teoretic va fi pe porțiunea convexă

$$\rho_T^{\min} = \frac{(a-b \cos \beta_{\min})^{\frac{3}{2}}}{c-d \cdot \cos \beta_{\min}} \quad (13)$$

iar pe porțiunea concavă

$$\rho_T^{\min} = \frac{(a-b)^{\frac{3}{2}}}{c-d} = \frac{R_1(1-\xi)^2}{Z-\xi} \quad (14)$$

Raza de curbură a profilului real pe porțiunea convexă este

$$\rho_r^{\min} = \rho_T^{\min} - r_b \quad (15)$$

iar pe porțiunea concavă este

$$\rho_r^{\min} = \rho_T^{\min} + r_b \quad (16)$$

Curbura redusă a celor două profile în contact este

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_r} + \frac{1}{r_b} = \frac{\rho_r + r_b}{\rho_r \cdot r_b} = \frac{\rho_r + r_b}{r_b(\rho_r - r_b)} = \frac{\rho_T}{r_b(\rho_T - r_b)} \quad (17)$$

Eforturile maxime pe porțiunea convexă corespund curburii reduse maxime (raza de curbură minimă)

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho_T^{\min}}{r_b(\rho_T^{\min} - r_b)} \quad (18)$$

Pentru determinarea razei bolțului, pentru care curbura redusă este minimă, se anulează derivata relației (17) în raport cu raza bolțului r_b :

$$\frac{d}{dr_b} \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{-\rho_T^{\min}(\rho_T^{\min} - 2r_b)}{(\rho_T^{\min} - r_b)^2 r_b^2} = 0 \quad (19)$$

Rezultă de aici, pentru $\rho_T^{\min} \neq 0$ că

$$r_b = \frac{1}{2} \rho_T^{\min} \quad (20)$$

ceea ce înseamnă că dacă raza bolțurilor se alege jumătate din raza de curbură minimă a profilului, se obțin eforturi la contact minime.

Se observă, totodată, că pentru $r_b = \rho_T^{\min}$ numitorul expresiei (18) se anulează și efortul la contact devine infinit de mare.

Curbura redusă a părții concave

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_b} - \frac{1}{\rho_r} = \frac{\rho_r}{r_b(\rho_r + r_b)} \quad (21)$$

Deoarece, în acest caz, curbura redusă nu poate deveni foarte mare, rezultă că partea concavă nu este periculoasă la contact.

Utilizând relația lui Hertz se determină eforturile maxime de contact și se compară cu cele admisibile

$$\sigma_c = 0,418 \sqrt{\frac{N}{B} \cdot E_{red} \cdot \frac{4}{\rho_T^{\min}}} \leq \sigma_{ac} \quad (22)$$

în care N este forța normală la contactul dintre dinții sateliților și bolțurile roții centrale, B este lățimea sateliului ($B = \psi d_1$), E_{red} este modulul de elasticitate redus $\left(E_{red} = \frac{2E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}\right)$.

Studiul tensiunilor de contact

Lucrarea [1] prezintă etapele necesare proiectării transmisiilor cicloidale. După calculul momentului transmis și alegerea razei de dispunere a bolțurilor $R_B = (0,37...0,4) \cdot a$ (a – gabaritul diametral al reductorului), se alege deplasarea specifică a profilului ($\xi = 1,15...1,5$).

Cu aceste date profilul dinților cicloidalii este descris complet.

Studiul tensiunilor la contactul dinților cicloidalii cu bolțurile angrenajului a avut ca scop principal evidențierea unor precizări privind alegerea valorii ξ .

Pentru un caz precizat $N = 4000$ [N], $B = 30$ [mm], s-a calculat ρ_T^{\min} și σ_k în funcție de valorile recomandate ale lui ξ .

Rezultatele sunt prezentate tabelar și grafic (Tabel 1 și 2 ; Fig 8 și 9).

Tabel 1

ξ	a=125, i=11		a=150, i=9		a=170, i=13		a=210, i=15		a=250, i=17		a=300, i=19		a=350, i=21	
	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k
1,15	8,624	1506	12,027	1276	10,288	1379	11,314	1315	12,136	1270	13,25	1215	14,178	1175
1,2	9,654	1424	13,463	1206	11,516	1304	12,665	1243	13,585	1200	14,831	1149	15,871	1110
1,25	10,479	1367	14,613	1157	12,5	1251	13,747	1193	14,745	1152	16,099	1103	17,227	1066
1,3	11,159	1324	15,562	1121	13,312	1212	14,64	1156	15,703	1116	17,144	1068	18,346	1033
1,35	11,733	1291	16,362	1094	13,995	1182	15,392	1128	16,509	1089	18,025	1042	19,288	1007
1,4	12,223	1265	17,045	1071	14,58	1159	16,035	1105	17,199	1067	18,778	1021	20,094	986,861
1,45	12,647	1244	17,636	1053	15,086	1139	16,591	1086	17,796	1049	19,429	1004	20,791	970,172
1,5	13,017	1226	18,153	1038	15,528	1123	17,077	1070	18,317	1034	19,999	989,205	21,4	956,264

ξ	a=400, i=35		a=450, i=42		a=550, i=56		a=600, i=63		a=700, i=71		a=850, i=85	
	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k	ρ_T^{\min}	σ_k
1,15	10,252	1382	9,743	1417	9,085	1468	8,861	1486	9,221	1457	9,416	1442
1,2	11,476	1306	10,906	1340	10,17	1387	9,919	1405	10,322	1377	10,54	1363
1,25	12,457	1253	11,838	1286	11,039	1331	10,766	1348	11,204	1322	11,441	1308
1,3	13,266	1215	12,607	1246	11,756	1290	11,466	1306	11,931	1281	12,184	1267
1,35	13,947	1185	13,254	1215	12,36	1258	12,055	1274	12,554	1249	12,81	1236
1,4	14,53	1161	13,808	1190	12,876	1233	12,558	1248	13,068	1224	13,345	1211
1,45	15,034	1141	14,287	1170	13,323	1212	12,998	1227	13,522	1203	13,808	1190
1,5	15,475	1125	14,706	1154	13,713	1195	13,375	1210	13,918	1186	14,213	1173

Tabel 2

a=350, i=21, B=30		N=1000	N=2000	N=3000	N=4000
ξ	ρ_T^{\min}	σ_k	σ_k	σ_k	σ_k
1,15	14,178	587,416	830,732	1017	1175
1,2	15,871	555,21	785,185	961,651	1110
1,25	17,227	532,91	753,649	923,027	1066
1,3	18,346	516,403	730,305	894,437	1033
1,35	19,288	503,631	712,242	872,315	1007
1,4	20,094	493,43	697,816	854,646	986,861
1,45	20,791	485,086	686,016	840,194	970,172
1,5	21,4	478,132	676,181	828,149	956,264

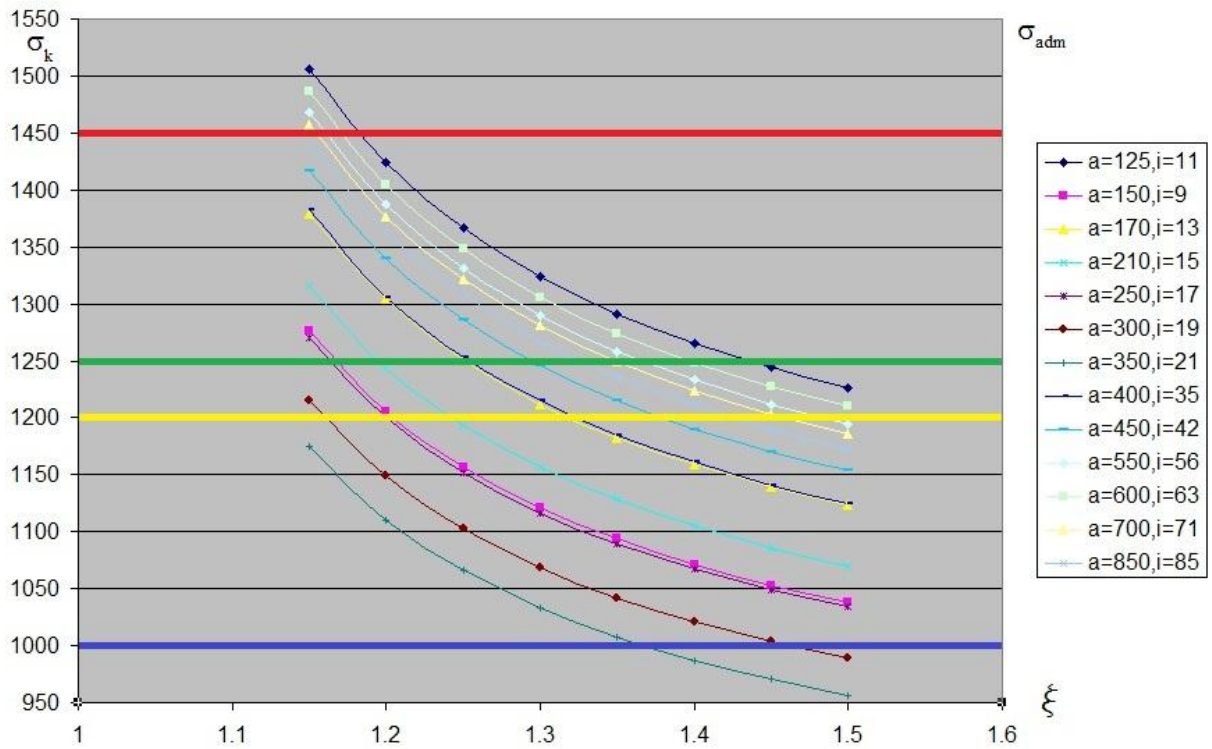


Fig. 8

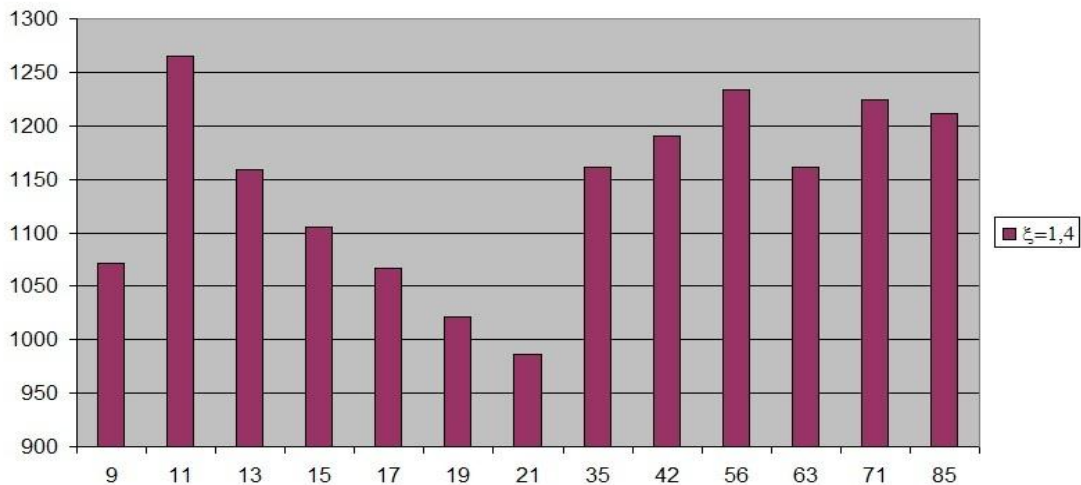


Fig. 9

Concluzii

Tensiunile de contact sunt în funcție de ξ (deplasarea specifică de profil) și de ρ_r^{\min} raza de curbură minimă a profilului dinților cicloidal.

Analizând valorile lui σ_k în funcție de ξ pentru diferite valori ale lui 'a' și 'i' a rezultat că la orice valoare a lui ξ , σ_k este minim pentru reductorul cu $i=21$ și $a=350$ [mm].

Generalizând putem spune că există o valoare minimă a σ_k pentru o pereche (i,a); profilul dintelui având în acest caz forma care conduce la cea mai mică solicitare de contact.

Datele prezentate în lucrare sunt utile pentru alegerea lui ξ în funcție de nivelul solicitărilor de contact, corelate cu $\sigma_{k,adm}$ pentru diferite materiale. În fig. 8 sunt înscrise valorile lui $\sigma_{k,adm}$ date în tabelul 3 [2].

Tabel 3

Materialul danturii	Tratamentul termic sau termochimic	$\sigma_{k,adm}$ [N/mm ²]
Oțeluri carbon sau oțeluri aliate de îmbunătățire	Calire completa	1200
	Călirea stratului de suprafață a flancurilor (prin CIF sau CFL)	1250
	Nitrurare în baie sau gaze	1000
	Nitrurare ionică	1250
Oțeluri de nitrurare	Nitrurare în gaz	1250
Oțeluri pentru cementare	Cementare sau nitro-cementare	1450

Bibliografie

- [1] Miloiu, G., Dudiță, F., Diaconescu, D.V. – TRANSMISII MECANICE MODERNE, Editura Tehnică, București, 1980
- [2] Dobre, V., Barbu, V., - ÎNDRUMĂTOR PENTRU PROIECTAREA ANGRENAJELOR ȘI BAZELOR TEORETICE DE CALCUL (I.P.A, BCA), București, 1998