# ANALIZA AMORTIZĂRII DINAMICE A MAŞINILOR ŞI UTILAJELOR TEHNOLOGICE ACŢIONATE PRIN VIBRAŢII

Conf. dr. ing. Nicuşor Drăgan
MECMET – Centrul de cercetare "Mecanica Maşinilor şi Echipamentelor Tehnologice"
Facultatea de Inginerie din Brăila, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi

The problem of insulation is very important for the process equipments driving by vibrations. This means less vibrations transmitted to human operators, to the environment and to the equipment himself. Sometimes it have to know how to insulate undesired vibrations keeping the useful vibrations done by the driving system. This article leads to some criterion to obtain a dynamical insulation of vibrations without to decrease their technological parameters.

## 1.INTRODUCERE

Prezenta lucrare abordează în special cazul utilajelor tehnologice şi a maşinilor cu un singur organ de lucru rezemat elastic acţionat armonic cu forţe unidirecţionale, cum ar fi cazul transportoarelor şi alimentatoarelor vibratoare, ciururilor vibratoare, plăcilor şi/sau rulourilor compactoare vibratoare, etc..

## 2.MODELAREA FIZICĂ ŞI MATEMATICĂ – VIBRAŢII LIBERE

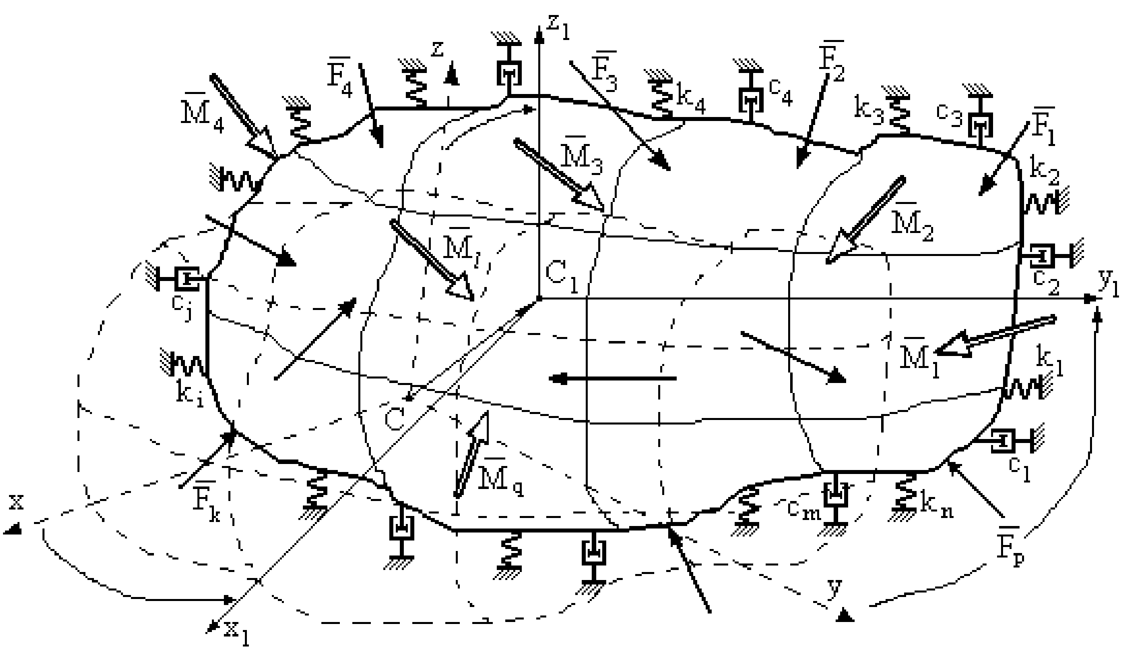


**Fig. 1**

Se consideră modelul cel mai general al unui solid rigid cu legături elastice şi/sau vâscoelastice ca în **figura 1**; deasemenea, se consideră că cele $n$ legăturile elastice $k_i \quad i=\overline{1,n}$ sunt triortogonale cu caracteristicile elastice ca în modelul din **figura 2**, iar forţele de amortizare vâscoasă sunt introduse de $m$ disipatoare triortogonale $c_j \quad j=\overline{1,m}$ modelate ca în **figura 3**.

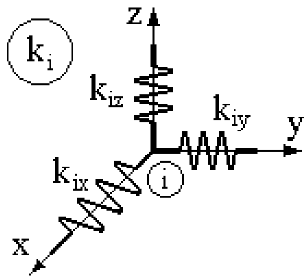


**Fig. 2**

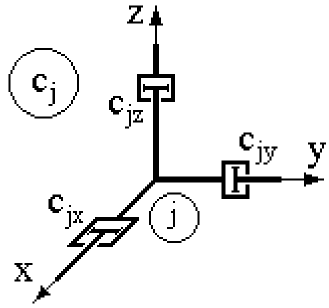


**Fig. 3**

Dacă asupra solidului rigid acţionează $p$ forţe $\overline{F}_k \quad k=\overline{1,p}$ în punctele $A_k(x_k, y_k, z_k)$ şi $q$ cupluri $\overline{M}_l \quad l=\overline{1,q}$ ca în **figura 1**, ecuaţia diferenţială de mişcare este [1]

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{\dot{q}}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}} \ , \tag{1}$$

unde $\underline{\underline{q}} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^{\mathrm{T}} = [X, Y, Z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^{\mathrm{T}}$ sunt coordonatele generalizate

$\underline{\underline{\dot{q}}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6]^{\mathrm{T}} = [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z]^{\mathrm{T}}$ - vitezele generalizate

$\underline{\underline{\ddot{q}}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6]^{\mathrm{T}} = [\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}, \ddot{\varphi}_x, \ddot{\varphi}_y, \ddot{\varphi}_z]^{\mathrm{T}}$ - acceleraţiile generalizate

$$\underline{\underline{f}} = \begin{Bmatrix} Q_X^F \\ Q_Y^F \\ Q_Z^F \\ Q_{\varphi_x}^F \\ Q_{\varphi_y}^F \\ Q_{\varphi_z}^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} F_{kx} \\ \sum\limits_{k=1}^{p} F_{ky} \\ \sum\limits_{k=1}^{p} F_{kz} \\ \sum\limits_{k=1}^{p} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) + \sum\limits_{l=1}^{q} M_{lx} \\ \sum\limits_{k=1}^{p} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) + \sum\limits_{l=1}^{q} M_{ly} \\ \sum\limits_{k=1}^{p} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) + \sum\limits_{l=1}^{q} M_{lz} \end{Bmatrix} \text{ - vectorul forţelor generalizate} \tag{2}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \text{ - matricea de inerţie} \tag{3}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B_{11}} & \underline{B_{12}} \\ \underline{B_{21}} & \underline{B_{22}} \end{bmatrix} \text{ - matricea de amortizare} \tag{4}$$

$$
\underline{B}=\begin{bmatrix}
\sum c_{jx} & 0 & 0 & 0 & \sum c_{jx}z_j & -\sum c_{jx}y_j\\
0 & \sum c_{jy} & 0 & -\sum c_{jy}z_j & 0 & \sum c_{jy}x_j\\
0 & 0 & \sum c_{jz} & \sum c_{jz}y_j & -\sum c_{jz}x_j & 0\\
0 & -\sum c_{jy}z_j & \sum c_{jz}y_j & \sum\left(c_{jy}z_j^2+c_{jz}y_j^2\right) & -\sum c_{jz}x_jy_j & -\sum c_{jy}z_jx_j\\
\sum c_{jx}z_j & 0 & -\sum c_{jz}x_j & -\sum c_{jz}x_jy_j & \sum\left(c_{jz}x_j^2+c_{jx}z_j^2\right) & -\sum c_{jx}y_jz_j\\
-\sum c_{jx}y_j & \sum c_{jy}x_j & 0 & -\sum c_{jy}z_jx_j & -\sum c_{jx}y_jz_j & \sum\left(c_{jx}y_j^2+c_{jy}x_j^2\right)
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{C}=\begin{bmatrix}\underline{C_{11}} & \underline{C_{12}}\\ \underline{C_{21}} & \underline{C_{22}}\end{bmatrix} \text{ - matricea de rigiditate} \qquad (5)
$$

$$
\underline{C}=\begin{bmatrix}
\sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ix}z_i & -\sum k_{ix}y_i\\
0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iy}z_i & 0 & \sum k_{iy}x_i\\
0 & 0 & \sum k_{iz} & \sum k_{iz}y_i & -\sum k_{iz}x_i & 0\\
0 & -\sum k_{iy}z_i & \sum k_{iz}y_i & \sum\left(k_{iy}z_i^2+k_{iz}y_i^2\right) & -\sum k_{iz}x_iy_i & -\sum k_{iy}z_ix_i\\
\sum k_{ix}z_i & 0 & -\sum k_{iz}x_i & -\sum k_{iz}x_iy_i & \sum\left(k_{iz}x_i^2+k_{ix}z_i^2\right) & -\sum k_{ix}y_iz_i\\
-\sum k_{ix}y_i & \sum k_{iy}x_i & 0 & -\sum k_{iy}z_ix_i & -\sum k_{ix}y_iz_i & \sum\left(k_{ix}y_i^2+k_{iy}x_i^2\right)
\end{bmatrix},
$$

punctele în care acţionează cele $n$ forţele elastice fiind $M_i(x_i,y_i,z_i)$, iar forţele disipative vâscoase acţionează în punctele $N_j(x_j,y_j,z_j)$.

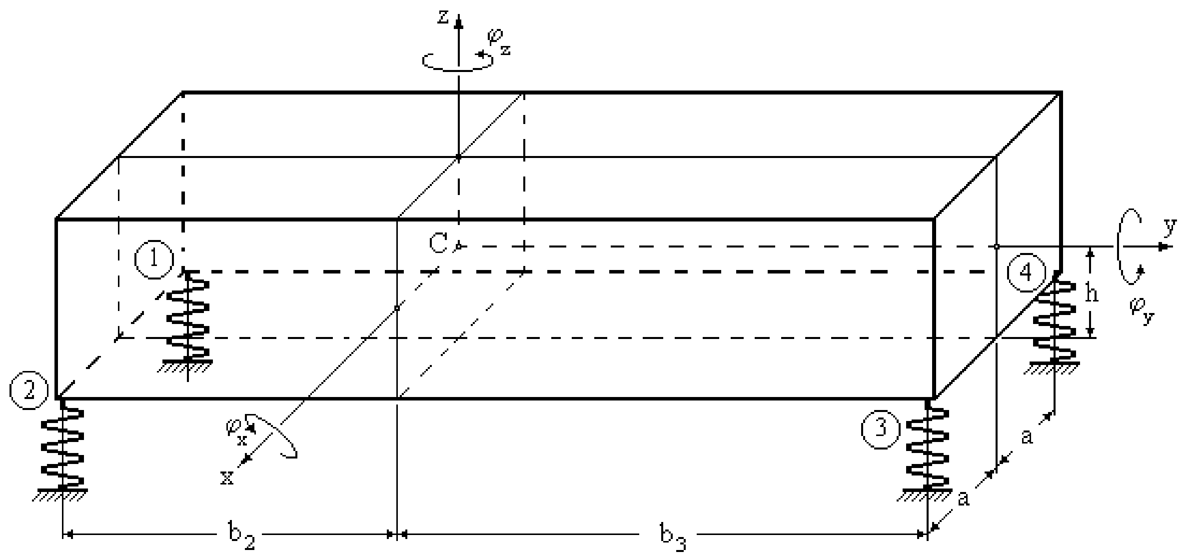


**Fig. 4**

Pentru simplificarea abordării analitice a problemei teoretice, se consideră că organul de lucru al utilajului tehnologic este rezemat elastic în patru puncte ca în **figura 4**. Deasemenea, se consideră că reazemele din punctele **1**, **2**, **3** şi **4** sunt identice, caracteristicile elastice ale acestora după direcţiile **x**, **y** şi **z** fiind $k_x$, $k_y$ respectiv $k_z$. În plus, se poate considera o simetrie structurală şi de distribuţie a maselor astfel încât rigidul rezemat elastic din figura 4 are un plan de simetrie vertical longitudinal, putând astfel utiliza sistemul de axe central **Cxzy** faţă de care se poate studia mişcarea, prin coordonatele generalizate $X$ (derapare), $Y$ (înaintare), $Z$ (săltare), $\varphi_x$ (galopare), $\varphi_y$ (ruliu) şi $\varphi_z$ (întoarcere). Dacă în plus, sistemul de axe este şi principal (cu centrul de greutate **C** situat la înălţimea $h$ faţă de planul de suspensie) rezultă o simplificare a ecuaţiilor diferenţiale de mişcare pe de o parte iar, pe de altă parte, o decuplare acestor ecuaţii cu o importanţă foarte mare pentru studiul analitic al parametrilor dinamici.

Conform [2], ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor libere ale subsistemelor decuplate sunt:
**a)**pentru vibraţiile cuplate longitudinale $Y$, verticale $Z$ şi de tangaj $\varphi_x$

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + 4k_y Y + 4hk_y \varphi_x = 0 \\ m\ddot{Z} + 4k_z Z + 2k_z (b_3 - b_2)\varphi_x = 0 \\ J_x \ddot{\varphi}_x + 4hk_y Y + 2k_z (b_3 - b_2) Z + 2\left[k_z \left(b_2^2 + b_3^2\right) + 2h^2 k_y\right]\varphi_x = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

**b)**pentru vibraţiile cuplate laterale $X$, de ruliu $\varphi_y$ şi de giraţie $\varphi_z$

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 4k_x X - 4hk_x \varphi_y - 2k_x (b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_y \ddot{\varphi}_y - 4hk_x X + 4\left(h^2 k_x + a^2 k_z\right)\varphi_y + 2hk_x (b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_z \ddot{\varphi}_z - 2k_x (b_3 - b_2) X + 2hk_x (b_3 - b_2)\varphi_y + 2\left[2a^2 k_y + k_x \left(b_2^2 + b_3^2\right)\right]\varphi_z = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

## 3.MODELAREA FIZICĂ ŞI MATEMATICĂ – VIBRAŢII FORŢATE

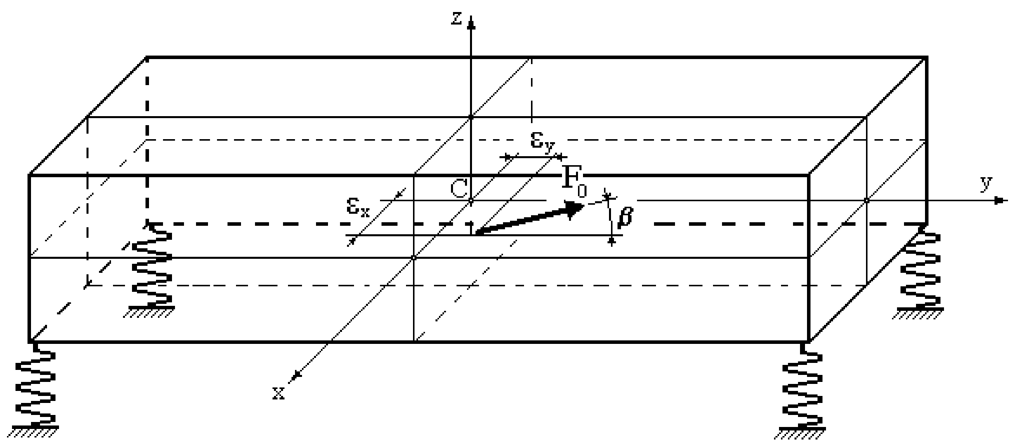


**Fig. 5**

Se consideră că asupra rigidului care modelează organul de lucru cu ipotezele din **§2** acţionează o excitaţie armonică unidirecţională de amplitudine $F_0$ şi pulsaţie $\omega$ ca în **figura 5**, unde $\beta$ este unghiul de înclinare a forţei (de obicei acesta este un parametru tehnologic, împreună cu $F_0$ şi $\omega$) iar $\varepsilon_x$ şi $\varepsilon_y$ sunt excentricităţile punctului de aplicare a forţei în raport cu centrul de greutate **C**. Deasemenea, se consideră că forţa este aplicată într-un plan vertical paralel cu planul central **zCy**. Cu aceste ipoteze, ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor forţate în regim stabilizat sunt:
**a)**pentru vibraţiile forţate ale subsistemului ($Y$, $Z$, $\varphi_x$)

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + 4k_y Y + 4hk_y \varphi_x = F_0 \cos\beta \sin\omega t \\ m\ddot{Z} + 4k_z Z + 2k_z (b_3 - b_2)\varphi_x = F_0 \sin\beta \sin\omega t \\ J_x \ddot{\varphi}_x + 4hk_y Y + 2k_z (b_3 - b_2) Z + 2\left[k_z \left(b_2^2 + b_3^2\right) + 2h^2 k_y\right]\varphi_x = \varepsilon_y F_0 \sin\beta \sin\omega t \end{cases} \qquad (8)$$

**b)**pentru vibraţiile forţate ale subsistemului ($X$, $\varphi_y$, $\varphi_z$)

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 4k_x X - 4hk_x \varphi_y - 2k_x (b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_y \ddot{\varphi}_y - 4hk_x X + 4\left(h^2 k_x + a^2 k_z\right)\varphi_y + 2hk_x (b_3 - b_2)\varphi_z = -\varepsilon_x F_0 \sin\beta \sin\omega t \\ J_z \ddot{\varphi}_z - 2k_x (b_3 - b_2) X + 2hk_x (b_3 - b_2)\varphi_y + 2\left[2a^2 k_y + k_x \left(b_2^2 + b_3^2\right)\right]\varphi_z = \varepsilon_x F_0 \cos\beta \sin\omega t \end{cases} \qquad (9)$$

Amplitudinile vibraţiilor forţate în regim stabilizat sunt [3] [4]:
**a)**pentru vibraţiile forţate ale subsistemului ($Y$, $Z$, $\varphi_x$)

$$A_Y=\frac{F_0\cos\beta}{\Delta_1}\left\{\left(4k_z-m\omega^2\right)\left[2k_z\left(b_2^2+b_3^2\right)+4h^2k_y-J_x\omega^2\right]-\left[2k_z\left(b_3-b_2\right)\right]^2\right\}+ \\ +\frac{4hk_yF_0\sin\beta}{\Delta_1}\left[2k_z\left(b_3-b_2\right)-\varepsilon_y\left(4k_z-m\omega^2\right)\right] \tag{10}$$

$$A_Z=\frac{F_0\sin\beta}{\Delta_1}\left\{\left[2k_z\left(b_2^2+b_3^2\right)+4h^2k_y-J_x\omega^2\right]\left(4k_y-m\omega^2\right)-\left(4hk_y\right)^2\right\}+ \\ +\frac{2\left(b_3-b_2\right)k_zF_0}{\Delta_1}\left[4hk_y\cos\beta-\varepsilon_y\left(4k_y-m\omega^2\right)\sin\beta\right] \tag{11}$$

$$A_{\varphi_x}=\frac{F_0}{\Delta_1}\left[-4hk_y\left(4k_z-m\omega^2\right)\cos\beta-2k_z\left(b_3-b_2\right)\left(4k_y-m\omega^2\right)\sin\beta+ \\ +\varepsilon_y\left(4k_y-m\omega^2\right)\left(4k_z-m\omega^2\right)\sin\beta\right], \tag{12}$$

unde

$$\Delta_1=\left(4k_y-\omega^2m\right)\left(4k_z-\omega^2m\right)\left\{2\left[k_z\left(b_2^2+b_3^2\right)+2h^2k_y\right]-\omega^2J_x\right\}- \\ -\left[2k_z\left(b_3-b_2\right)\right]^2\left(4k_y-\omega^2m\right)-\left(4hk_y\right)^2\left(4k_z-\omega^2m\right) \tag{13}$$

**b)**pentru vibraţiile forţate ale subsistemului ($X$, $\varphi_y$, $\varphi_z$)

$$A_X=\frac{2k_x}{\Delta_2}\left\{-2h\varepsilon_xF_0\left[4a^2k_y+k_x\left(b_3+b_2\right)^2-J_z\omega^2\right]\sin\beta+ \\ +\varepsilon_xF_0\left(b_3-b_2\right)\left(4a^2k_z-J_y\omega^2\right)\cos\beta\right\} \tag{14}$$

$$A_{\varphi_y}=\frac{-\varepsilon_xF_0}{\Delta_2}\left\{\left[4a^2k_y+2k_x\left(b_2^2+b_3^2\right)-J_z\omega^2\right]\left(4k_x-m\omega^2\right)- \\ -\left[2k_x\left(b_3-b_2\right)\right]^2\right\}\sin\beta+\frac{\varepsilon_xF_0}{\Delta_2}2hk_x\left(b_3-b_2\right)m\omega^2\cos\beta \tag{15}$$

$$A_{\varphi_z}=\frac{-\varepsilon_xF_0}{\Delta_2}2hk_x\left(b_3-b_2\right)m\omega^2\sin\beta+ \\ +\frac{\varepsilon_xF_0}{\Delta_2}\left\{\left(4k_x-m\omega^2\right)\left[4\left(h^2k_x+a^2k_z\right)-J_y\omega^2\right]-\left(4hk_x\right)^2\right\}\cos\beta, \tag{16}$$

unde

$$\Delta_2=\left(4k_x-m\omega^2\right)\left[4\left(h^2k_x+a^2k_z\right)-J_y\omega^2\right]\left\{2\left[2a^2k_y+k_x\left(b_2^2+b_3^2\right)\right]-J_z\omega^2\right\}+ \\ +2\left(-4hk_x\right)\left[2hk_x\left(b_3-b_2\right)\right]\left[-2k_x\left(b_3-b_2\right)\right]-\left[2hk_x\left(b_3-b_2\right)\right]^2\left(4k_x-m\omega^2\right)- \\ -\left[-2k_x\left(b_3-b_2\right)\right]^2\left[4\left(h^2k_x+a^2k_z\right)-J_y\omega^2\right]-\left(-4hk_x\right)^2\left\{2\left[2a^2k_y+k_x\left(b_2^2+b_3^2\right)\right]-J_z\omega^2\right\} \tag{17}$$

## 4.ANALIZA CONDIŢIILOR DE AMORTIZARE DINAMICĂ

Pentru a stabili condiţiile în care se poate face o amortizare dinamică a echipamentului trebuie să se stabilească parametrii care pot fi modificaţi fără a afecta cerinţele tehnologice; de obicei cerinţele tehnologice se referă la amplitudinile vibraţiilor forţate de înaintare şi de săltare cu respectarea unghiului de aruncare, acestea fiind relativ uşor de controlat prin intermediul forţei perturbatoare (cu parametrii $F_0$, $\omega$ şi $\beta$).

Din analiza relaţiilor care dau expresiile amplitudinilor vibraţiilor forţate, se constată o anulare a vibraţiilor forţate în următoarele condiţii:

**1.**dacă $\varepsilon_x = 0$ (planul forţei unidirecţionale coincide cu planul vertical de simetrie) ►anularea vibraţiilor forţate (nedorite) ale subsistemului ($X$, $\varphi_y$, $\varphi_z$)

**2.**dacă $h = 0$ (rezemare în planul orizontal al centrului de greutate):

**a)**anularea vibraţiilor forţate de întoarcere la acordarea vibraţiilor libere necuplate de săltare cu perturbaţia:

$$\omega^2 = p_Z^2 = 4\frac{k_z}{m} \Rightarrow A_{\varphi_z} = 0 \tag{18}$$

**b)** $\varepsilon_y = 0$ (forţă perturbatoare unidirecţională centrală) conduce la anularea vibraţiilor forţate de săltare la acordarea vibraţiilor libere necuplate de galopare cu perturbaţia:

$$\omega^2 = p_{\varphi_x}^2 = \frac{2k_z}{J_x}\left(b_2^2 + b_3^2\right) \Rightarrow A_Z = 0 \ , \tag{19}$$

unde $p_Z$ şi $p_{\varphi_x}$ sunt pulsaţiile proprii pentru mişcările „necuplate" de săltare şi galopare.

**3.**dacă $b_2 = b_3$ rigidul din figura 4 are două plane verticale de simetrie (deci o axă verticală de simetrie); în acest caz problema vibraţiilor libere şi forţate se schimbă calitativ, având loc o decuplare a mişcărilor sistemului în următoarele subsisteme şi mişcări independente

**a)**subsistemul ($X$, $\varphi_y$) cu mişcări cuplate de derapare şi legănare

**b)**subsistemul ($Y$, $\varphi_x$) cu mişcări cuplate de înaintare şi galopare

**c)**mişcare independentă de săltare $Z$

**d)**mişcare independentă de întorcere $\varphi_z$

## 5.CONCLUZII

Pentru a putea analiza în mod pertinent condiţiile în care are loc o reducere a vibraţiilor forţate nedorite la utilajele şi echipamentele cu acţionare dinamică armonică, încă de la început trebuie să se stabilească parametrii care pot fi schimbaţi şi cei care sunt impuşi din motive tehnologice. Din analiza dinamică a condiţiilor în care are loc reducerea sau anularea amplitudinilor vibraţiilor forţate, se pot formula următoarele concluzii:

►cea mai eficientă cale de reducere a vibraţiilor nedorite este de a asigura simetria longitudinală a echipamentului şi din punctul de vedere al acţionării ($\varepsilon_x = 0$)

►amortizarea dinamică în sensul de acordare a pulsaţiei perturbaţiei cu una din pulsaţiile caracteristice din sistemul se poate face numai dacă centrul de greutate se găseşte în planul orizontal al punctelor de rezemare; chiar şi aşa, problema amortizării dinamice trebuie abordată separat pentru fiecare caz în parte pentru că, sau se obţine o amortizare dinamică pentru vibraţiile tehnologice utile (19) sau pulsaţia $\omega$ a perturbaţiei poate fi destul de apropiată de una din pulsaţiile proprii ale sistemului (18), funcţionarea utilajului putând avea loc în regim de rezonanţă.

## 6.BIBLIOGRAFIE


[1]**Bratu, P. P., Drăgan, N.** - *"L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle equivalent de rigide aux liaisons visco-elastiques",* Analele Universităţii "Dunărea de Jos" din Galaţi, Fascicula XIV, 1997

[2] **Bratu, P. P., Drăgan, N.** - *"L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques",* Analele Universităţii "Dunărea de Jos" din Galaţi, Fascicula XIV, 1997

[3] **Drăgan, N.** - *"Les paramètres dynamiques du rigide aux liaisons élastiques excité par des sollicitations deterministes",* Analele Universităţii "Dunărea de Jos" din Galaţi, Fascicula XIV, 1997

[4] **Drăgan, N.** - *"Contribuţii la analiza şi optimizarea transportului prin vibraţii" – teză de doctorat,* Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, 2001