

# APROXIMAREA PROFILULUI TRANSVERSAL AL DRUMURILOR PRIN FUNCȚII MATEMATICE ÎN VEDEREA EVALUARII PARAMETRILOR DE CALITATE AI SUPRAFEȚEI CAROSABILE

**Prof. dr. ing. Bruja Adrian**  
**Șef lucr. dr. ing. Dima Marian**  
**Asist. ing. Cătălin Frâncu**

*Universitatea Tehnică de Construcții București*  
*Facultatea de Utilaj Tehnologic*

**Rezumat:** În această lucrare se prezintă o modalitate de aproximare a profilului transversal al drumurilor cu funcții matematice. Profilul drumului se obține prin intersectarea unui fascicul laser cu suprafața drumului și fotografierea urmei lasate de laser cu o camera foto de tip AreaScan.

**Cuvinte cheie:** Profil transversal, parametri de calitate.

## 1. Introducere

Calitățile suprafeței unei îmbrăcămînți rutiere moderne sunt uniformitatea, rugozitatea și impermeabilitatea. Dintre cele trei calități enumerate anterior, cea de-a treia, impermeabilitatea, nu face obiectul prezentei lucrări.

O îmbrăcăminte are suprafața netedă sau uniformă dacă, în profil longitudinal și transversal, cotele sale nu depășesc toleranțele admise față de proiect (conform standardelor și normelor în vigoare) și în special dacă este lipsită de denivelări și neregularități.

Planeitatea suprafeței căii de rulare este o calitate esențială care asigură confortul circulației și care duce la reducerea cheltuielilor de tracțiune, a uzurii vehiculelor și chiar a uzurii sistemului rutier.

Înrăutățirea stării de planeitate a căii de rulare duce la micșorarea calităților de exploatare ale drumului. De aceea starea îmbrăcămînții trebuie controlată cu regularitate pentru a se putea determina felul și volumul lucrărilor necesare în vederea păstrării calităților de exploatare ale drumului.

În profil transversal, parametri care caracterizează calitatea suprafeței căii de rulare sunt (conform ISO 13473-1:1997):

- Adâncimea profilului;
- Adâncimea medie a profilului
- Adâncimea estimată a texturii;
- Spectrul texturii (profilului).

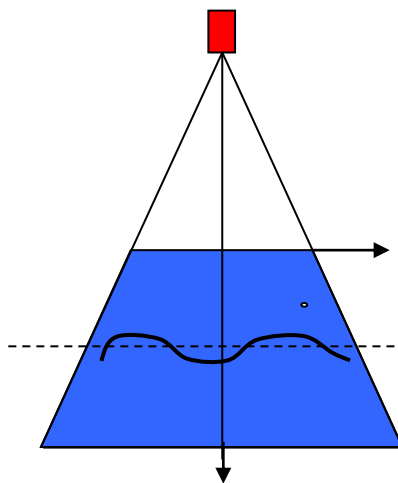


Fig. 1

Profilul transversal al drumului, figura 1, se obtine dirijand un fascicul laser perpendicular pe suprafata drumului si fotografiind urma lasata de laser cu o camera foto de tip AreaScan al carui senzor percepe numai lungimea de unda a luminii corespunzatoare fascicului laser. Prin prelucrarea fotografiei rezulta profilul transversal ca un sir de puncte de coordonate  $(x, y)$ .

Profilul transversal al căii de rulare reprezentat prin puncte de coordonate  $(x, y)$  cu pasul  $h$  poate fi privit ca valori eşantionate ale unui "semnal"  $y(x)$ . Din aceste eşantioane se poate reconstrui prin metode matematice un semnal continuu care reprezintă o aproximare a profilului transversal al căii de rulare. Acest semnal continuu poate fi supus unei analize armonice din care să rezulte parametrii de calitate ai suprafeţei căii de rulare.

Obţinerea semnalului continuu se poate face pe două căi:

- a) compararea semnalului eşantionat cu semnale de probă;
- b) aproximarea semnalului eşantionat cu funcţii periodice.

Dintre cele două căi, în cadrul acestei lucrari, se alege cea de-a doua deoarece standardele din domeniu fac referire lungimi de undă şi componente spectrale.

## 2. Metode de aproximare a profilului cu funcţii periodice

### A. Metoda de interpolare liniară

#### Prezentare

Prin interpolare liniară a valorilor şirului de puncte  $(x_i, y_i)$  cu  $y_i = f(x_i)$ ,  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $i = 1..n$ , pentru un anumit interval  $[x_i, x_{i+1}]$ , funcţia reconstruită  $y = f(x)$ , continuă pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ , este determinată de valorile  $y_i$  şi  $y_{i+1}$  la capetele intervalului. Valoarea sa în interiorul intervalului fiind dată de formula:

$$y(x) = \frac{(x - x_i) \cdot y_{i+1} + (x_{i+1} - x) \cdot y_i}{h} \quad (\text{a.1})$$

Pentru exemplificare se consideră un şir de 50 de puncte  $(x_i, y_i)$  ca fiind puncte ale căror coordonate sunt obţinute după prelucrarea imaginii camerei foto AreaScan. Valorile acestor coordonate sunt date în tabelul A1.

Prin aplicarea formulei (a.1) graficul funcţiei  $y = f(x)$  arată ca în figura A.1

Tabel A1

xi	yi	xi	yi	xi	yi	xi	yi	xi	yi
1	20,075	11	22,195	21	20,027	31	20,273	41	21,008
2	21,930	12	21,209	22	20,532	32	22,616	42	20,440
3	22,582	13	21,201	23	21,797	33	22,383	43	22,612
4	21,909	14	22,138	24	20,383	34	21,646	44	21,329
5	21,815	15	21,511	25	22,214	35	22,827	45	22,936
6	22,222	16	22,308	26	20,059	36	22,717	46	20,085
7	21,195	17	21,422	27	22,925	37	22,895	47	21,373
8	20,970	18	21,548	28	20,146	38	21,576	48	21,473
9	21,288	19	20,774	29	21,099	39	21,424	49	20,898
10	20,196	20	21,997	30	21,102	40	20,798	50	20,167

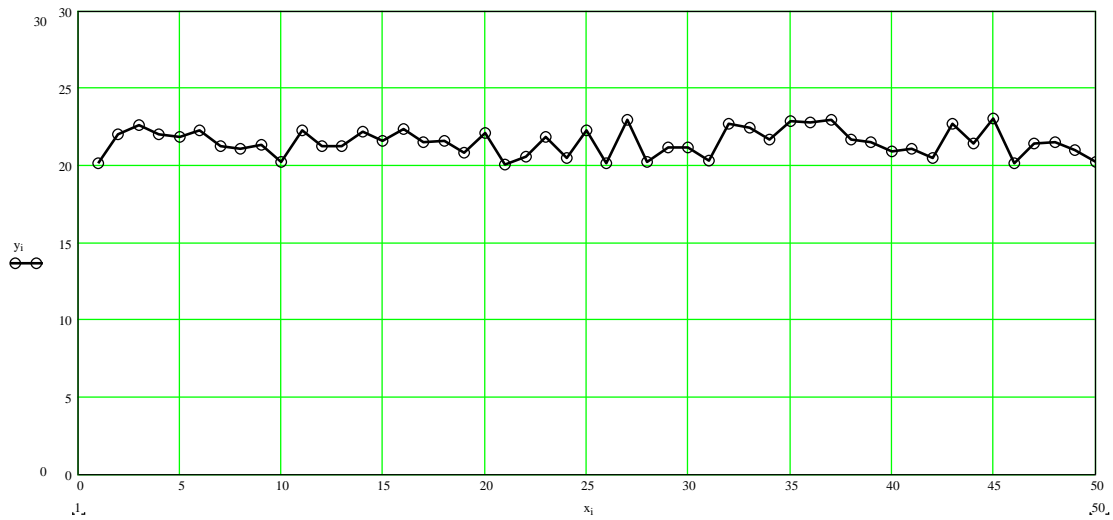


Fig. A.1

### Avantaje

- Prelucrarea este foarte ușoară și rapidă
- Funcția trece prin punctele măsurate.

### Dezavantaje

- Pe fiecare interval  $[x_i, x_{i+1}]$  coeficienții expresiei (a.1) se schimbă;
- Sunt greu de pus în evidență parametrii de calitate ai profilului suprafeței căii de rulare.

## B. Interpolarea cu funcții trigonometrice

### Prezentare

O funcție periodică  $f(x)$  pentru care se cunosc valorile (eșantioanele)

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1 \dots n$$

se poate scrie sub forma polinomului Fourier

$$g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^M \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{n}\right) \right], \quad (\text{b.1})$$

care reprezintă aproximată prin interpolare cu funcții trigonometrice a funcției  $f(x)$ , dezvoltarea în serie Fourier.

$$\text{Termenul} \quad a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{n}\right), \quad (\text{b.2})$$

se numește armonică de ordinal  $k$  a funcției  $f(x)$ .

Coeficienții polinomului trigonometric din (b.1) se calculează cu relațiile:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{b.3})$$

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos\left(\frac{k\pi x_i}{n}\right), \quad (\text{b.4})$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin\left(\frac{k\pi x_i}{n}\right). \quad (\text{b.5})$$

Aplicând relațiile (b.1...b.5) pentru valorile din tabelul A1 se obține rezultatul prezentat grafic în figura B.1.

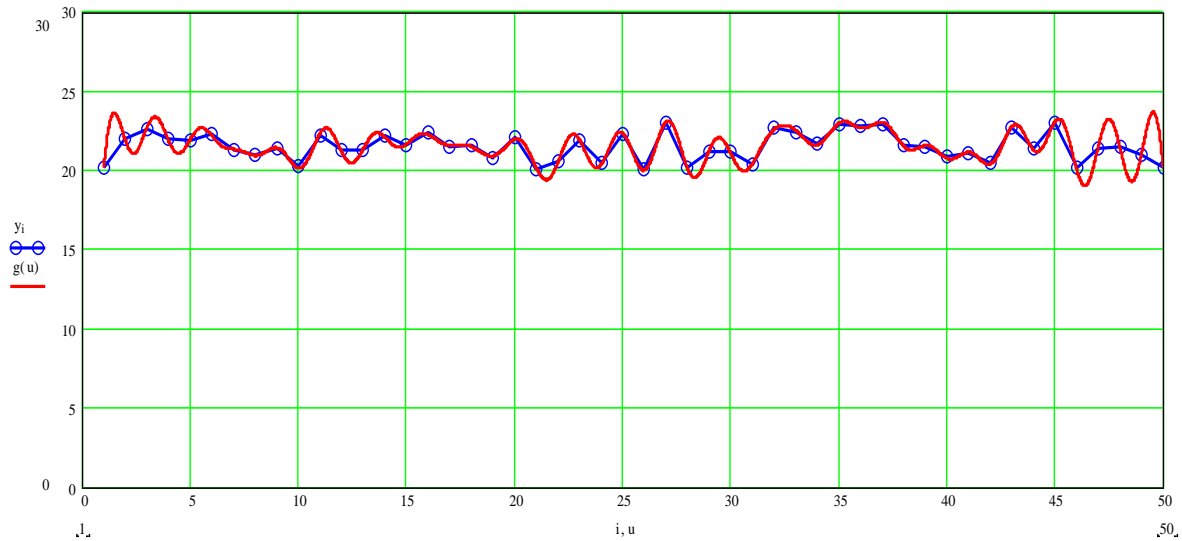


Fig. B.1

Dacă notăm  $a_k = A_k \cos \varphi_k$ ,  $b_k = -A_k \sin \varphi_k$  rezultă

$$A_k = \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)}, \quad (\text{b.6})$$

respectiv

$$\varphi_k = -\arctan(b_k / a_k), \quad (\text{b.7})$$

iar formula (b.1) se scrie sub forma:

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\pi x / n + \varphi_k), \quad (\text{b.8})$$

sau

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x / n + \psi_k), \quad (\text{b.9})$$

între  $\varphi_k$  și  $\psi_k$  existând relația  $\psi_k = \varphi_k + \pi/2$

Dacă funcția  $f(x)$  este pară atunci aproximarea se face numai în funcție de cosinusuri și în acest caz pentru

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1 \dots n$$

forma polinomului de aproximare Fourier este

$$g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^M \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{n}\right) \right], \quad (\text{b.10})$$

în care

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{b.11})$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos\left(\frac{k\pi x_i}{n}\right). \quad (\text{b.12})$$

Pentru valorile din tabelul A1 se obține graficul din figura B.2.

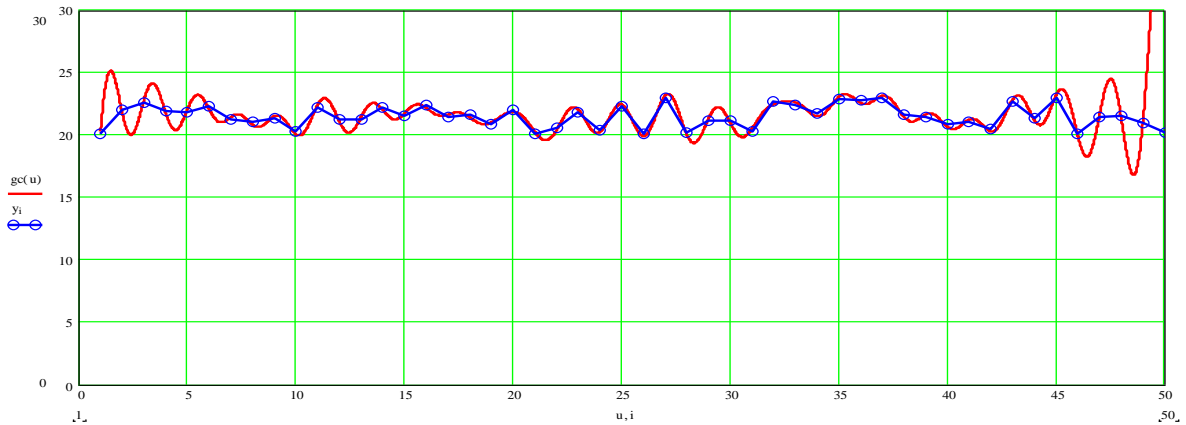


Fig. B.2

Dacă funcția  $f(x)$  este impară atunci aproximarea se face numai în funcție de sinusuri și în acest caz pentru

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1 \dots n$$

forma polinomului de aproximare Fourier este

$$g(x) = \sum_{k=1}^M \left[ b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{n}\right) \right], \quad (\text{b.13})$$

în care

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin\left(\frac{k\pi x_i}{n}\right). \quad (\text{b.14})$$

Pentru valorile din tabelul A1 se obține graficul din figura B.3.

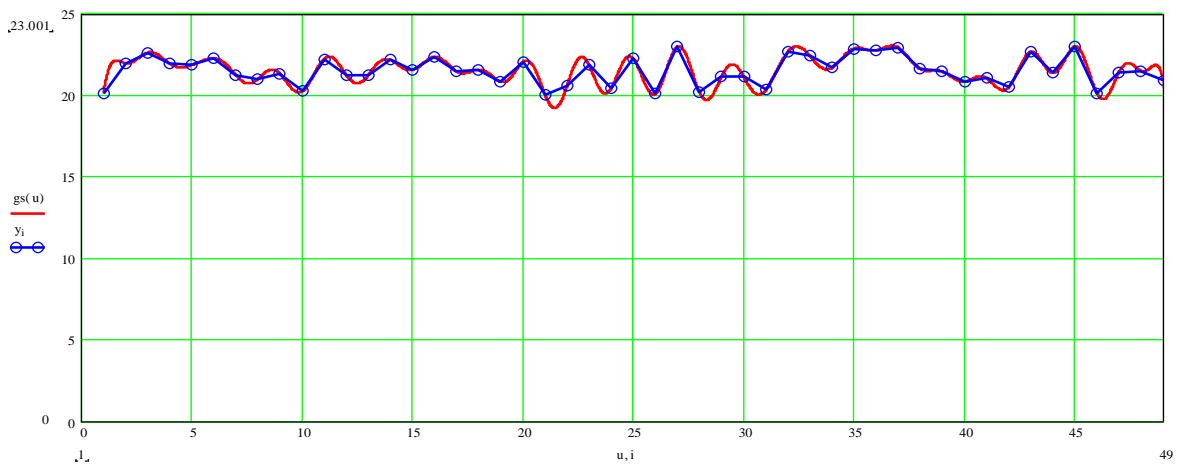


Fig. B.3

#### Avantaje

- Funcția obținută este continuă și are aceeași expresie pentru tot profilul considerat;
- Se poate folosi întregul aparat matematic referitor la funcții, respective analiza armonică, pentru punerea în evidență a caracteristicilor funcției de aproximare;
- Se pot deduce foarte ușor caracteristici precum: perioadă, frecvență, amplitudine etc.

#### Dezavantaje

- Sunt necesare calcule mai complicate;
- Trebuie verificată convergența valorilor seriilor cu valorile măsurate  $y_i = f(x_i)$ .

### C. Teorema eșantionării

#### Prezentare

O funcție periodică  $f(x)$  pentru care se cunosc valorile (eșantioanele)

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1 \dots n$$

se poate scrie sub forma

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) \text{sinc}[\Omega_{\max}(x - kT_e)], \quad (\text{c.1})$$

$$\text{în care funcția, } \text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (\text{c.2})$$

reprezintă funcția sinus cardinal, iar  $\Omega_{\max}$  este frecvența maximă și  $T_e$  este perioada de eșantionare.

Conform teoremei eșantionării, *un semnal poate fi complet reconstruit din eșantioanele sale cu condiția ca frecvența de eșantionare să fie cel puțin dublul frecvenței maxime a semnalului.*

Pentru valorile din tabelul A1 considerate eșantioane ale funcției  $f(x)$  se obține graficul din figura C.1.

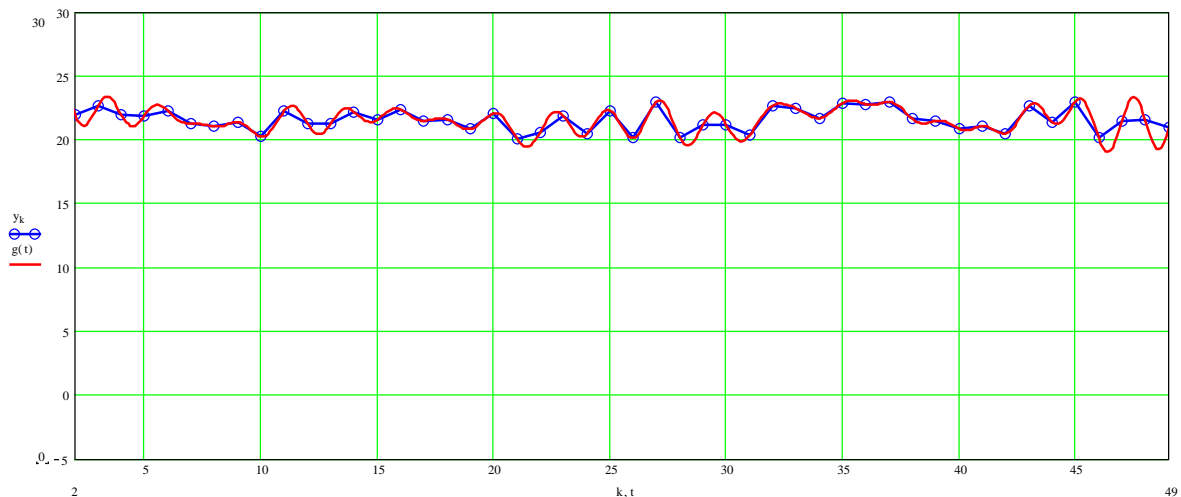


Fig. C1

#### Avantaje

- Funcția obținută este continuă și are aceeași expresie pentru tot profilul considerat;
- Se poate folosi întregul aparat matematic referitor la funcții, respective analiza armonică, pentru punerea în evidență a caracteristicilor funcției de aproximare;
- Perioada, frecvența și amplitudinea sunt puse în evidență în expresia funcției.

### 3. Corelația între proprietățile matematice ale funcției de aproximare a profilului și parametrii de calitate ai căii de rulare

a) Nivelul mediu al profilului pe intervalul de măsurare  $N_m$

Dacă  $x_a$  și  $x_b$  sunt capetele intervalului de măsurare a profilului transversal atunci nivelul mediu al profilului pe acest interval este

$$N_m = \frac{1}{x_b - x_a} \int_{x_a}^{x_b} g(x) dx.$$

Pentru întreg profilul valoarea medie este data de coeficientul  $A_0$  din relațiile (b.8) sau (b.9)

b) Maximul profilului transversal pe intervalul de măsurare  $N_{\max}$

$$N_{\max} = \text{Max}[g(x)], x \in [x_a, x_b],$$

$$N_{\max,1} = \text{Max}[g(x)], x \in \left[ x_a, \frac{x_a + x_b}{2} \right],$$

$$N_{\max,2} = \text{Max}[g(x)], x \in \left[ \frac{x_a + x_b}{2}, x_b \right].$$

c) Adâncimea profilului  $H_p$  pe intervalul de măsurare

$$H_p = N_{\max} - g(x), x \in [x_a, x_b].$$

d) Adâncimea medie a profilului

$$MPD = \frac{N_{\max,1} + N_{\max,2}}{2} - N_m.$$

e) Adâncimea estimată a texturii

$$ETD = 0,2 + 0,8 \cdot MPD.$$

f) Spectrul texturii

Șirul de coeficienți  $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$  din relația (b.6) reprezintă spectrul de amplitudini al profilului  $g(x)$ , șirul  $\varphi_k$  spectrul de faze al acestuia iar șirul  $\omega_k = \pi k / n$  reprezintă spectrul de frecvențe al profilului  $g(x)$ .

Conform standardului ISO 13473-1:1997 spectrul de frecvențe al profilului  $g(x)$  se împarte astfel:

- Frecvențele mai mari 2000 cicluri/m sau lungimi undă mai mici de 0,5 mm caracterizează microtextura;
- Frecvențele cuprinse între 20 și 2000 cicluri/m sau lungimi undă între 50 și 0,5 mm caracterizează macrotextura;
- Frecvențele cuprinse între 2 și 20 cicluri/m sau lungimi undă între 500 și 50 mm caracterizează megatextura;

g) Rugozitatea texturii

Analog metodei petei de nisip se poate deduce rugozitate texturii pornind de la profilul transversal al căii de rulare astfel:

- în locul volumului de nisip împrăștiat se consideră aria golurilor cuprinsă profilul transversal și dreapta orizontală care trece prin nivelul maxim al profilului

$$A = N_{\max,1,2}(x_b - x_a) - \int_{x_a}^{x_b} g(x) dx$$

- în locul ariei petei de nisip se consideră lungimea intervalului de măsurare  $l = x_b - x_a$

și rezultă

$$R_t = A/l.$$

#### 4. Concluzii

1. Dintre toate metodele de determinare a funcției de aproximare  $g(x)$  cea mai precisă este metoda C bazată teorema eșantionării deoarece funcția  $g(x)$  trece prin punctele  $y_i = f(x_i), i = 1..n$ ;
2. Rata de eșantionare (pasul  $h$  al citirilor pe axa  $x$ ) trebuie corelată acuratețea dorită pentru analiza parametrilor de calitate ai profilului transversal conform teoremei eșantionării, respectiv pentru caracterizarea macrotexturii pasul  $h$  trebuie să fie cel mult 0,25 mm iar pentru caracterizarea megastructurii cel mult 25 mm .

#### Bibliografie

- [1] Standard ISO 13473-1:1997(E)
- [2] Stănășilă, O. – Analiză matematică. EDP, București, 1981.
- [3] Kecs, W. – Complemente de matematici cu aplicații în tehnică. Ed. tehnică, București, 1981.
- [4] Berbente, C., ș.a. – Metode numerice. Ed. tehnică, București, 1997.
- [5] Ciochină, S. - Prelucrarea numerică a semnalelor.
- [6] Naforniță, I., ș.a. – Semnale și sisteme.
- [7] Bruja, A., s.a. - Sistem robotizat pentru prelevarea video automata a suprafeței arterelor rutiere. Contract INOVARE nr. 188/2008.