EVALUAREA PRIN CALCUL FRACTAL A UNOR PARAMETRI TRIBOLOGICI

Davidescu Dumitru Anton, Conf. univ. dr. ing., U.T.C.B. – Facultatea de Utilaj Tehnologic

ABSTRACT

The paper is focused on the possibility to calculate the fractal parameters of the two involute teeth rough flanks modeled by two rough cylindrical gear pairs, on the basis of fractal geometry conception.

In conclusion it is possible to put in evidence the coefficient and force of friction and wear too in fractal-tribological studies.

1. DESPRE GEOMETRIA FRACTALĂ

Este o nouă geometrie ce priveşte contururile neregulate, iniţiată de B.B.Mandelbrot prin anul 1967, când a vrut să stabilească lungimea exactă a ţărmurilor Angliei. Această geometrie *neeuclidiană* este prezentată în lucrarea [1]. Denumirea *fractal* provine de la *frangere*-a rupe, în fragmente neregulate. Îndeosebi în perioada 1983-1991 mai mulţi autori au studiat diferite aspecte ale acestei probleme, de la proteine şi materiale poroase până la rugozitatea discurilor magnetice la scară nanometrică, apoi până la aceea a suprafeţelor metalice, fiind abordată chiar şi uzura, ca efect al frecării unor suprafeţe *care s-au dovedit a fi fractale.* Cele mai cunoscute lucrări ale unor autori străini sunt [2-6]. În ţara noastră, geometria fractală a fost abordată prima dată în lucrarea [7] din 1992, fiind publicată în Revista Academiei Române. Atunci s-a pus problema calculării ariei reale de contact a rugozităţilor flancurilor evolventice ale unui angrenaj, atât pe cale fractală cât şi statistică.

2. FRACTALII, SUPRAFEŢELE INGINEREŞTI ŞI TRIBOLOGIA

Lucrările care se ocupă cu fractalii şi suprafeţele rugoase, denumite *inginereşti,* pot fi grupate în două categorii ce vor fi explicitate în continuare.

2.1. Prima categorie

Aceasta priveşte lucrările în care autorii, apreciind teoria lui Mandelbrot, o aplică numai la suprafeţe cu rugozităţi nanometrice. În această categorie sunt plasate lucrările [1-6]. Cea mai importantă este lucrarea [4] a lui Majumdar şi Bhushan. Subliniem că în aceasta, în contrast cu parametri clasici(abaterea medie pătratică a înălţimilor rugozităţilor, înălţimea medie a acestora, raza de curbură a vârfurilor), teoria fractală are doi parametri caracteristici: D şi G (independenţi de frecvenţa ω, ce reprezintă inversul scalei de lungime $\omega = \frac{1}{l_s}$ μm^{-1}).

D- este un parametru al dimensiunii profilului suprafeţei, care depinde de gradul de finisare al acesteia. De exemplu pentru suprafeţe strunjite D $\approx$ 1,8.

G- este o caracteristică a scalei de lungime a suprafeţei (μm).

Deşi autorii admit că rugozitatea suprafeţei este estimată prin parametri convenţionali statistici ce depind de lungimea L a suprafeţei investigate şi de rezoluţia rugozimetrului, totuşi ei admit şi existenţa unei relaţii între parametri statistici şi cei fractali [8,9,12] :

$$R_q \approx \left[\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} S(\omega) \cdot d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

în care: R_q este abaterea medie pătratică; ω_{min} este valoarea minimă a frecvenţei iar ω_{max} cea maximă şi dacă $\omega_{max} \gg \omega_{min}$ relaţia (1) se poate rezolva astfel $R_q \approx \omega_{\min}^{D-2}$, când 1<D<2.

Menţionăm că în lucrarea [4] este prezentată şi expresia spectrului de putere S(ω) scrisă de Weierstrass şi Mandelbrot (W-M), de forma:

$$S(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2\ln\gamma} \cdot \frac{1}{\omega^{5-2D}} \ [\mathrm{m}^3] \tag{2}$$

unde γ =1,5 .

Această expresie permite determinarea parametrului G. Autorii admit că 1<D<2 şi γ >1 iar atunci când este îndeplinită condiţia $\omega_{max} \gg \omega_{min}$ se poate folosi expresia următoare:

$$\delta = G^{D-1} \cdot l^{2-D} = G^{D-1} \cdot a^{\frac{2-D}{2}} \tag{3}$$

unde: δ- este deformaţia microasperităţii, l- este lungimea contactului, iar a- este aria petei de contact la nivelul unei microasperităţi.

Din (3) poate rezulta valoarea parametrului D. Precizăm că spotul "a" al suprafeţei de contact se poate afla în regim de deformaţie elastică sau în regim de deformaţie plastică, în funcţie de raza de curbură la vârful asperităţilor şi de deformatia δ. Cele două regimuri sunt delimitate de aşa numita arie critică a_c definită prin:

$$a_c = \frac{G^2}{\left(\pi \cdot \frac{K\Phi}{2} \right)^{\frac{2}{D-1}}} \tag{4}$$

unde -KΦ=H/E este un coeficient al materialului (H-duritatea şi E- modulul de elasticitate).

În lucrarea [4] este menţionată expresia ariei reale de contact, de forma:

$$A_r = \frac{D}{2-D} a_l \tag{5}$$

unde: a_l este aria celui mai mare spot de contact.

Dacă $a_l > a_c$ aria reală se află atât în contact elastic cât şi plastic se poate delimita pe cele două zone utilizând expresiile:

$$A_{re} = \frac{D}{2-D}\left(a_l - a_l^{\frac{D}{2}} \cdot a_c^{\frac{2-D}{2}} \right) \quad [\mu\mathrm{m}^2] \tag{6}$$

$$A_{rp} = \frac{D}{2-D} \cdot a_l^{\frac{D}{2}} \cdot a_c^{\frac{2-D}{2}} \quad [\mu\mathrm{m}^2] \tag{7}$$

2.2. A doua categorie

Este constituită din lucrările noastre [7-12], în care ne-am ocupat în paralel de calculul fractal şi de cel statistic, pentru acelaşi model tribologic, format dintr-un cilindru rugos şi o placă plană rigidă. În toate lucrările au fost determinaţi succesiv respectivii parametri monofractali D şi G. Au fost acceptate valorile $H=6{,}7\times10^3$Mpa pentru duritatea suprafeţei şi $E=2{,}3\times10^3$Mpa pentru modulul de elsticitate.

În lucrarea [12] s-a observat că lucrările [2-6] nu au luat în considerare timpul t_s şi nici coeficientul de frecare static μ_s, care rezultă din relaţia Rabinovitz [13]:

$$\mu_s = \mu_a + \gamma \cdot t_s^{\beta} \tag{8}$$

în care β şi γ sunt nişte constante, pentru oţel având valorile β=0,034 respectiv γ =0,03.

În aceste lucrări s-a constatat că nu toate suprafeţele sunt fractale. Deasemenea, că la început şi la sarcini mici, numai cele mai înalte microasperităţi vin în contact, mai precis în contact plastic. Marea diferenţă dintre rezultatele calculului monofractal şi a celui statistic apare pentru rugozităţile înalte şi sarcinile mai mari. La încărcări normale apare o diferenţă mare între valorile ariilor reale de contact, calculate fractal respectiv statistic(acolo unde suprafeţele sunt fractale).

3. FRACTALITATEA SUPRAFEŢELOR

În lucrările anterioare, nedispunând de o metodă adecvată, a fost apreciată fractalitatea cu o aproximaţie mare. O metodă geometrică corespunzătoare este propusă de Hasegawa [14] în 1996 şi poartă numele de "metoda compasului"; trebuie să precizăm că există şi alte metode uzuale pentru determinarea parametrilor fractali, cum ar fi : "metoda cutiei", "metoda masei", "metoda ariei şi perimetrului". Metoda compasului, utilizată cu succes şi în lucrările [15,16], este relativ simplu de utilizat şi presupune parcurgerea umătoarelor etape:

- Se utilizează o profilogramă conformă a suprafeţei de studiu (profilogramă obţinută cu factori de amplificare egali, atât pe orizontală cât şi pe verticală), de exemplu cea prezentată în fig.1;
- Pe conturul acestui profil se măsoară N deschideri de valoare r ale compasului;
- Dacă în diagrama din fig.2, cu abscisa lgr şi ordonata lg[N(r)], punctele de coordonate (lgr,lgN(r)) se află pe o dreaptă, atunci se poate considera că suprafaţa studiată este fractală şi permite aplicarea calculului fractal;
- Panta acestei drepte este chiar valoarea parametrului fractal D luată cu semn negativ.

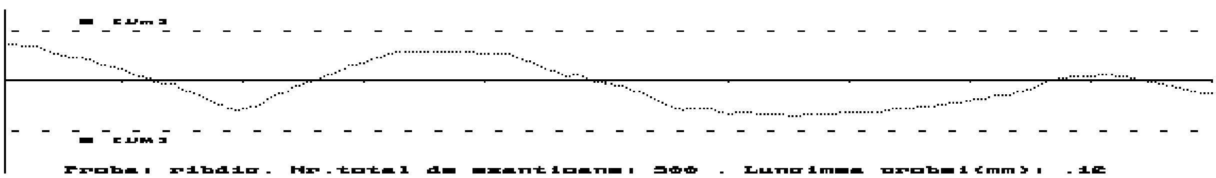

Figura 1: Profilograma unei suprafeţe obţinute prin strunjire, amplificare 1400:1, l_s=120μm

Astfel pentru o suprafaţă cilindrică obţinută prin diferite procede de prelucrare (Epruvete I1,I3,I5,I7,I9) utilizând "metoda compasului" au fost determinate valorile parametrului fractal D, prezentate în tabelul1.

Atunci când $\omega_{max} \gg \omega_{min}$ valoarea parametrului fractal G poate fi obţinută din expresiile (9) şi (10).

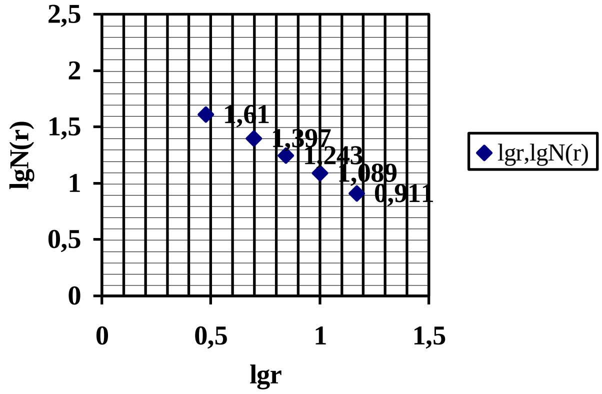

Figura 2: Relaţia dintre lgr şi lgN(r)

Tabelul 1

Valorile fractale măsurate									
Număr epruvetă	D	Număr epruvetă	D	Număr epruvetă	D	Număr epruvetă	D	Număr epruvetă	D
I1.5.0	1,020	I3.5.0	1,019	I5.5.0	1,021	I7.5.0	1,012	I9.5.0	1,047
I1.5.10	1,073	I3.5.10	1,059	I5.5.10	1,043	I7.5.10	1,047	I9.5.10	1,098
I1.5.30	1,043	I3.5.30	1,051	I5.5.30	1,035	I7.5.30	1,019	I9.5.30	1,019
I1.5.60	-	I3.5.60	-	I5.5.60	-	I7.5.60	-	I9.5.60	-

4. EVALUAREA PRIN CALCUL FRACTAL A UNOR PARAMETRI TRIBOLOGICI

Relaţia (9) permite obţinerea abaterii medii pătratice a rugozităţii, R_q , unde $\omega_{min}=1/l_s$ [μm^{-1}] este frcvenţa minimă calculată cu ajutorul lungimii de studiu, l_s, a profilului microgeometric

$$R_q = \left[\frac{G^{2(D-1)}}{2\ln\gamma} \cdot \frac{1}{4-2D} \cdot \omega_{\min}^{2(D-2)} \right]^{1/2} \tag{9}$$

$$G = \exp\left\{ \frac{1}{2(D-1)} \cdot \ln\left[4(2-D) \cdot R_q^2 \cdot l_s^{2(D-2)} \cdot \ln\gamma \right] \right\} [\mu m] \tag{10}$$

Determinarea razei medii la vârful microasperităţilor se poate face utilizând relaţia fractală:

$$\bar{\rho}_e = \frac{a^{D/2}}{\pi^2 G^{D-1}} \quad [\mu m] \tag{11}$$

unde a [μm^2] este pata de contact ce se formează la nivelul unei microasperităţi supusă unei deformaţii ce are valoarea δ[μm].

Între mărimea petei de contact a, deformaţia δ şi parametri fractali D şi G există o relaţie de forma:

$$\delta = G^{D-1} a^{\frac{2-D}{2}} \quad [\mu m] \tag{12}$$

Din (12) va rezulta valoarea petei de contact:

$$a = \exp\left\{ \frac{2}{2-D} \left[\ln\delta - (D-1)\ln G \right] \right\} \text{ [}\mu\text{m}^2\text{]} \tag{13}$$

Deformaţia critică a asperităţii δ_{cr} se determină din relaţia:

$$\delta_{cr} = \left(\frac{K\Phi}{2} \right)^2 \frac{a^{D/2}}{G^{D-1}} \text{ [}\mu\text{m]} \tag{14}$$

unde: $K\Phi = \frac{H}{E}$; H=2,2 10^{-3} N/μm^2 iar E=0,21 N/μm^2.

Aria critică a asperităţii se poate obţine din:

$$a_c = \frac{G^2}{\left(\pi \cdot \frac{K\Phi}{2} \right)^{\frac{2}{D-1}}} \qquad \text{[}\mu\text{m}^2\text{]} \tag{15}$$

Aria reală de contact este dată de relaţia:

$$A_r = \frac{D}{2-D} a_l \qquad \text{[}\mu\text{m}^2\text{]} \tag{16}$$

unde : a_l este aria celui mai mare spot de contact.

Aria reală elastică A_{re} şi aria reală plastică A_{rp} se pot obţine prin utilizarea relaţiilor:

$$A_{re} = \frac{D}{2-D} \left(a_l - a_l^{\frac{D}{2}} \cdot a_c^{\frac{2-D}{2}} \right) \qquad \text{[}\mu\text{m}^2\text{]} \tag{17}$$

$$A_{rp} = \frac{D}{2-D} \cdot a_l^{\frac{D}{2}} \cdot a_c^{\frac{2-D}{2}} \qquad \text{[}\mu\text{m}^2\text{]} \tag{18}$$

Aria aparentă este determinată prin relaţia:

$$A_a = 2 \cdot l_H \cdot l_s \qquad \text{[}\mu\text{m}^2\text{]} \tag{19}$$

unde: l_H este semilăţimea fâşiei hertziene de contact.

$$l_H = 1{,}128 \cdot \left(\frac{F_n}{B} \cdot R \cdot \theta \right)^{0,5} \qquad \text{[}\mu\text{m]} \tag{20}$$

în care: F_n[N] este încărcarea normală a cuplei; B este lungimea de contact a cuplei de frecare; R este raza epruvetei inelare; θ=2/E [μm^2/N].

Calculul parametrilor adimensionali G^*, A_r^* şi a_c^* se face cu ajutorul următoarelor relaţii:

$$G^* = \frac{G}{\sqrt{A_a}}; \; A_r^* = \frac{A_r}{A_a}; \; a_c^* = \frac{a_c}{A_a} \tag{21}$$

Ei sunt necesari pentru determinarea forţelor elastică şi plastică ce solicită o microasperitate.

5. FORŢA DE FRECARE CINETICĂ

Se consideră ca importantă dependenţa parametrilor tribologici de timp, astfel că teoria fractală poate fi îmbunătăţită prin introducerea concepţiilor privind timpul mai ales asupra coeficientului de frecare cinetic, asupra forţei de frecare de alunecare şi asupra uzării. Deci, în ceea ce priveşte latura tribologică, se trece de la deplasarea de la o acţiune de tip hertzian de deformare elastică şi plastică a rugozităţii (sub acţiunea unei sarcini normale), la cazul în care ar acţiona şi o componentă tangenţială (sau numai aceasta). Ar mai trebui adăugat că cei care au făcut, la început, o legătură a fractalului cu tribologia (cercetătorii Majumdar, Bhushan şi Ling etc.), au gândit suprafaţa rugoasă numai la scară nanometrică, deci nu ceea ce se cheamă “engineering surface”. Cercetările actuale iau in consideraţie şi calitatea suprafeţelor inginereşti, cu aplicaţie la majoritatea organelor de maşini.

5.1. Un prim pas

În lucrarea [12], pentru prima dată, s-a ţinut seama de timpul de contact, t_s, în studiul tribologic fractal pe un model liniar, între un cilindru de oţel prelucrat prin sperfinisare şi o placă rigidă perfect netedă. Dintre mai multe relaţii caracteristice ale coeficientului de frecare static μ_s, scrise de autori consacraţi(E.Rabinowicz, P.G.Horwe, I.V.Kraghelsky etc.) a fost preferată relaţia lui Rabinowicz [13]

$\mu_s = \mu_a + \gamma \cdot t_s^{\beta}$, menţionată anterior la 2.2., în care coeficientul de frecare cinetic μ_a poate fi determinat atât experimental cât şi analitic. În acest caz, admiţând teoria adeziunii moleculare, expresia globală a lui μ_a pentru contactul ariei reale A_r (16) cu un plan ideal P, conţine suma dintre o componentă de adeziune şi una de deformaţie [9]:

$$\mu_a = \mu_{ad} + \mu_d \tag{22}$$

5.2. Al doilea pas admis

Întrucât coeficientul de frecare plastic $\mu_p \gg \mu_{ae}$ se admite cel elastic zero (μ_{ae}=0), iar expresia (8) va deveni:

$$\mu_s = \mu_{ap} + \gamma \cdot t_s^{\beta} \tag{23}$$

În lucrarea [12] , în tabelul 1, sunt prezentate valorile expresiei $\gamma \cdot t_s^{\beta}$ şi cele ale lui μ_{ap} , pentru valori ale timpului t_s cuprinse între 0 şi 60 secunde. Pentru modelul respectiv şi sarcina F_n=0,4246 [N], se obţin pentru forţa de frecare statică valorile F_{smax}=0,466[N] şi F_{smin}=0,183[N]. Pe baza valorilor coeficientului de frecare static μ_s, din relaţia (8) se obţin cele ale lui μ_a şi respectiv ale forţelor de frecare cinetice.

6. UZAREA

În lucrarea [17], Zhou şi colaboratorii, deşi consideră o încărcare statică, fără a avea în vedere t_s, μ_s şi μ_{ap}, propun un model care leagă uzura de adeziune de parametri fractali, arătând că între volumul de material uzat şi aria reală totală (A_r=A_{re}+A_{rp}) există o relaţie de forma:

$$V_r \propto A_r^{m(D)} \tag{24}$$

în care: funcţia m(D)=0,5...1 (relaţie asemănătoare cu aceea a lui Archard [18]). Tot aceştia stabilesc şi valori fractale optime, adică acelea care conduc la minimizarea volumului de uzură, V_r. Lucrarea are meritul de a fi publicată în 1993, dar ea reprezintă numai un model de tratare analitică prin care se ajunge la volumul de material uzat fără a utiliza valoarea experimentală a forţei de frecare.

În teza de doctorat [15] s-a arătat că desprinderea unei particule de uzură se produce şi în domeniul elastic(nu numai în cel plastic). Aceasta, pentru că s-a ţinut seama şi de fenomenul de oboseală a vârfurilor asperităţilor, datorită unei stări de tensiune variabilă dintre vârfuri şi suprafaţa conjugată. S-a reuşit şi o hartă de uzare a vârfurilor asperităţilor prin utilizarea unui program de calcul realizat în Mathcad. Prin acest program de calcul au fost determinaţi parametri tribologici prin calcul fractal.

Cu unele din aceste date s-a putut determina şi parametrul complex al microgeometriei, din [11], $\Delta_r = \dfrac{R_y}{r \cdot b^{1/\nu}}$, r fiind raza medie de curbură a vârfurilor asperităţilor iar b şi ν sunt parametri curbei de portanţă. Când valoarea acestui parametru complex este optimă, valorile coeficientului de frecare şi a vitezei de uzare sunt minime.

În lucrarea [18] au fost obţinute astfel de valori optime ale parametrului Δ_r , fiind în prealabil măsurate valorile medii ale razelor de curbură la vârfurile asperităţilor.

Deoarece nu există o relaţie specifică a vitezei de uzură în cazul rugozităţilor fractale, dispunând de valorile coeficienţilor de frecare şi a forţelor de frecare menţionate, au fost determinate aceste valori prin utilizarea relaţiilor uzării de adeziune (care predomină) din lucrarea [11].

CONCLUZII

Au putut fi obţinute şi la unele suprafeţe inginereşti fractale, prin calcul fractal şi măsurători, valorile necesare tribologice privind frecarea şi uzarea acelor suprafeţe.

BIBLIOGRAFIE

[1] Mandelbrot, B.B.: *The fractal geometry of nature*, W.H. Freedman, New York, 1992.

[2] Majumdar, A., Bhushan, B.: *Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of sourfaces*, Journal of Tribology, apr.1990, 112, p.205-216.

[3] Bhushan, B., Doerner, M.F.: *Role of mechanical properties and surface texture in the real area on contact of magnetic rigid disks*, Journal of Tribology, 111,1989.

[4] Majumdar, A., Bhushan, B.: *Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces*, Journal of Tribology, 1991, 113, p.1-11.

[5] Bhushan, B., Majumdar, A.: *Elastic-plastic contact model for bifractal surfaces*, Wear, 153 (1992).

[6] Ling, F.F.: *Fractals, engineering surfaces and tribology*, Wear,16, 1990.

[7] Pavelescu, D.: *On the real contact area for involute gear rough teeth, the fractal and statistical concepts*, Rev. Roum. Science Technical-Mechanical Applications T.37,nr.4, 1992.

[8] Pavelescu, D., Tudor, A.: *On the fractal and statistical calculus concerning a curved and rough engineering surface contacting a smooth plane*, Rev. Rom. Science Technical Mechanical Applications, T.39,nr.4, 1994, pag.432-439.

[9] Tudor, A.: *Contactul real al suprafeţelor de frecare*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1990.

[10] Tudor, A., Pavelescu, D., Savu, T.: *Main aspects and observation concerning the possibility for using the fractal theory in the case of rough engineering surfaces*, ROTRIB'96, I, Bucureşti, Editura Tehnică, 1996, p.33-49.

[11] Tudor, A.: *Frecarea şi uzarea materialelor*, Ed. BREN,Buc., 2002.

[12] Pavelescu, D., Tudor, A.: *The contact time in fractal tribologycal studies*, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, Vol. I, Nr.1/2001, p.55-58.

[13] Rabinovitz, E.: *The determination of the compatibility of metals through static friction*, ASME trans., 14, 3, 1971, p.198.

[14] Hasegawa, M., Liu, J., Okuda, K.: *Calculation of the fractal dimensions of machined surfaces profiles*, Wear 192, 1996, p.40-45.

[15] Davidescu, A.: *Contribuţii asupra interdependenţei dintre calitatea suprafeţelor şi performanţele tribologice ale cuplelor neconforme cu alunecare*, Teză de doctorat, Universitatea "Politehnica" Bucureşti, 2003.

[16] Davidescu, D.A.: *The fractal and non-fractal roughness of some diferently machined steel surfaces*, Rotrib'03 Galaţi, 24-26 september 2003, The Annals of "Dunãrea de Jos" University of Galaţi, Fascicle VIII, Tribology, Volume I, 2003, pp 413-416, ISSN 1221-4590.

[17] Zhou, G.Y., Leu, M.C., Blackmore, D., Fractal geometry model for wear prediction, Wear, 170, 1993.
[18] Davidescu, D.A., Pavelescu, D., Tudor, A. and Seiciu, L.P.: *The importance of accuracy values of the Abbott- Firstone parameters curve for fractal or non fractal calculus*, The Annals of University “Dunãrea de Jos” of Galaţi, Fascicle VIII, Tribology, 2004, pp. 3-6, ISSN 1221-4590.