

# STUDIUL CINEMATII POMPELOR HIDROSTATICE CU PISTOANE AXIALE

Prof. dr. ing. Adrian BRUJA  
Şef lucrări ing. Marian DIMA  
Asist. ing. Cătălin Frâncu

## Rezumat

*În lucrare se prezintă o metodă originală pentru studiul cinematicii pompelor hidrostactice cu pistoane axiale pornind de la metode pentru studiul cinematicii mecanismelor spatiale cu bare (metoda conturului de vectori). Sunt deduse ecuațiile pentru traiectoria, viteza și accelerația unui punct oarecare al discului cu mișcare de precesie și mai departe pentru articulația pistonului*

## 1. Introducere

În figura 1 este prezentată schema cinematică pentru mecanismul unei pompe cu pistoane axiale. Elementul cinematic cu mișcare de precesie este discul montat pe arborele cotit și la care sunt articulate bieletele.

Pentru studiul cinematicii discului se folosește mecanismul cu bare echivalent din fig. 2.

Rezolvarea generală a pozițiilor se bazează pe geometria conturilor vectoriale. Fiecare vector al conturului reprezintă schematic câte un corp al lanțului cinematic și are extremitățile pe axele cuplelor respective. Vectorii conturului sunt așezați unul după altul, astfel încât în permanență extremitatea finală a unuia coincide cu extremitatea inițială a următorului, indiferent de modificarea pozițiilor lor drept consecință a mișcării elementelor lanțului cinematic. Se formează astfel un poligon spațial deformabil, figura 3.

În cazul unor poligoane cu număr redus de laturi, rezolvarea lor algebrică sau vectorială se poate face direct. Pentru poligoane cu număr mare de laturi se preferă înlocuirea lor cu poligoane care au numai laturi perpendiculare între ele (deși acestea au un număr dublu de laturi), prin descompunerea fiecărui vector în două componente pe direcția și pe normala la axe, figura 4. Astfel din trei laturi consecutive, cea din mijloc este perpendiculară pe cele extreme. Unele laturi sunt îndreptate după axele cuplelor, iar altele, perpendiculare pe acestea și reprezintă schematic elementele lanțului cinematic.

Din cauza perpendicularității laturilor consecutive ale conturului, există o dualitate între vectorii  $\vec{l}_i$  ai axelor și  $\vec{n}_i$  ai normalelor comune pe două axe consecutive și, respectiv, între lanțurile cinematice deduse unele din altele prin inversarea axelor de cuple și de elemente cinematice  $\vec{l}_i \leftrightarrow \vec{n}_i$ .

Vectorul astfel atașat unui element cinematic se scrie funcție de versorii axelor de rotație și normalelor comune prin  $s_i \cdot \vec{l}_i + a_i \cdot \vec{n}_i$ , unde  $a_i = B_i A_{i+1}$  este lungimea perpendicului comune de

versor  $\bar{n}_i$ , considerată totdeauna pozitivă și  $s_i = A_i B_i$  este deplasarea axială în cupla cilindrică  $C_i$ , considerată pozitivă sau negativă după cum vectorul  $A_i B_i$  are același sens sau are sens contrar versorului  $\bar{l}_i$ .

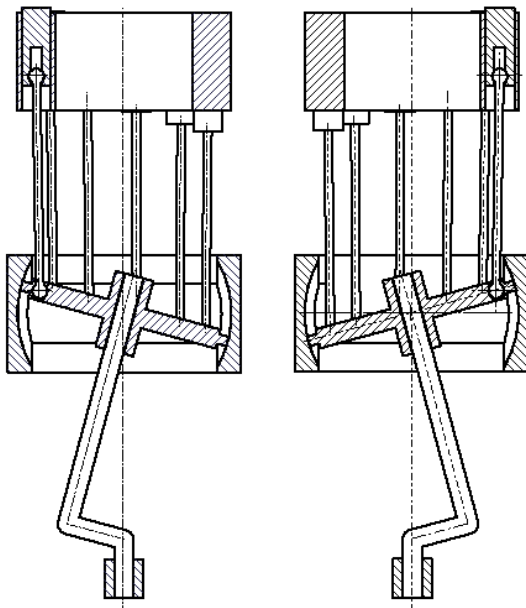


Fig. 1

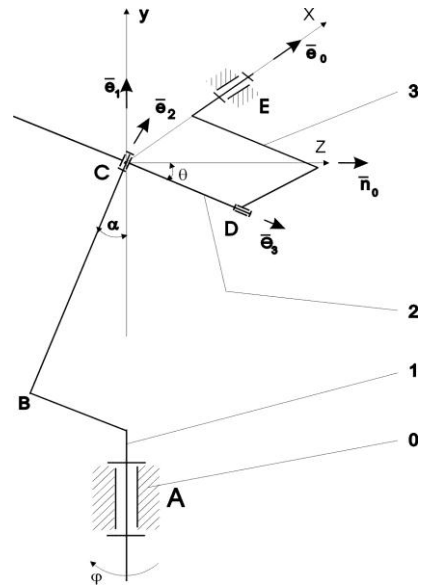


Fig. 2

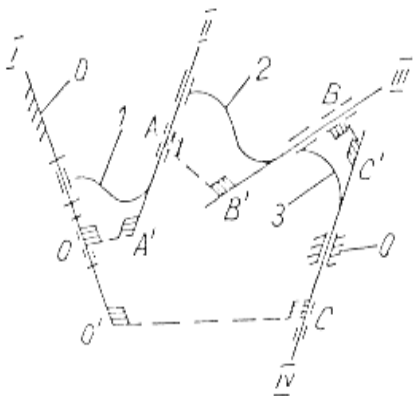


Fig. 3

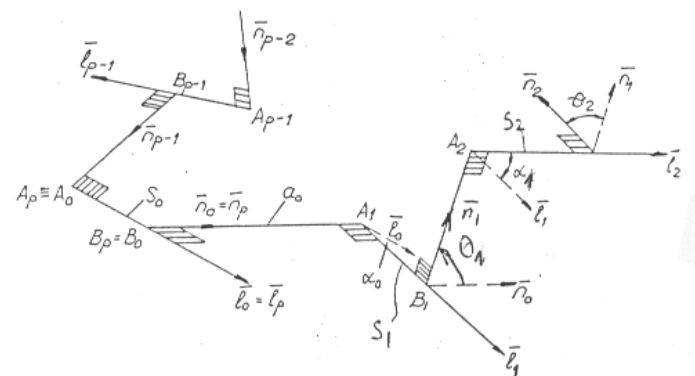


Fig. 4

Suma vectorilor  $s_i \cdot \bar{l}_i + a_i \cdot \bar{n}_i$  pentru întregul contur este zero. Această sumă se poate scrie în două sisteme de notații, după cum parcurgerea conturului se face în sens direct, pozitiv, sau invers, negativ (notații stelate).

$$\sum_{i=1}^p (s_i \cdot \bar{l}_i + a_i \cdot \bar{n}_i) = 0, \quad \sum_{j=1}^p (s_j^* \cdot \bar{l}_j^* + a_j^* \cdot \bar{n}_j^*) = 0, \quad (1)$$

relația între indici fiind  $i + j = p + 1$ ,  $p$  reprezentând numărul de elemente cinemate.

Deoarece la parcurgerea conturului în cele două sensuri se schimbă numai sensurile versorilor nu și direcțiile lor înseamnă că

$$\bar{l}_j^* + \bar{l}_i = 0, \quad \bar{n}_j^* + \bar{n}_{i-1} = 0. \quad (2)$$

Exprimând versorii  $\bar{l}_i$  ai axelor de rotație și  $\bar{n}_i$  ai normalelor în raport cu un triedru fix  $(\bar{n}_0, \bar{l}_0, \bar{l}_1)$  și înlocuind în relația (2) rezultă expresii de forma

$$A \cdot \bar{l}_0 \times l_1 + B \cdot \bar{l}_0 + C \cdot \bar{l}_1 + A^* \cdot \bar{l}_0^* \times l_1^* + B^* \cdot \bar{l}_0^* + C^* \cdot \bar{l}_1^* = (A - A^*) \cdot \bar{l}_0 \times l_1 + (B - C^*) \cdot \bar{l}_0 + (C - B^*) \cdot \bar{l}_1 = 0 \quad (3)$$

ceea ce conduce la următoarele relații scalare (setul ecuațiilor de rotații)

$$A_i = A_j^* \quad B_i = C_j^* \quad C_i = B_j^* \quad (4)$$

O altă exprimare a versorilor  $\bar{l}_i$  și  $\bar{n}_i$  se poate face în raport cu triedrul reciproc  $(\bar{n}^0, \bar{l}^0, \bar{l}^1)$  și efectuând transformările versorilor se obține setul ecuațiilor de rotații sub forma

$$A_i = A_j^* \quad B_i = C_j^* \quad C_i = B_j^* \quad (5)$$

Expresiile componentelor versorilor pentru un mecanism spațial monocontur cu patru axe sunt date în [1,2].

## 2. Studiul pozițiilor

### a) Determinarea unghiului $\theta$

Utilizând cele două sisteme de notații ale axelor și normalelor, simplă și stelată, după cum conturul este parcurs în sens direct sau invers, se scrie setul ecuațiilor de rotație:

Sistem i	1	2	3	4 $\equiv$ 0
Sistem * j	4	3	2	1 $\equiv$ 0

$$\begin{aligned} A_i &= A_j^* & B_i &= C_j^* & C_i &= B_j^* \\ A_i &= A_j^* & B_i &= C_j^* & C_i &= B_j^* \end{aligned} \quad (6)$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații, ținând cont de valorile unghiurilor de încrucișare dintre axe rezultă

$$\mathbf{tg} \alpha \cdot \mathbf{cos} \varphi = \mathbf{tg} \theta \quad (7)$$

Această relație stabilește mărimea unghiului  $\theta$ , făcut în plan vertical de raza CD a discului care trece articulația sferică a bieletei, funcție de unghiul  $\alpha$  de înclinare al axei discului și de unghiul  $\varphi$  cu care s-a rotit arborele conducător.

### b) Determinarea poziției articulației sferice

Punctul  $D_1(x,y,z)$  este un punct al discului 2, fig. 2, corespunzător articulației sferice dintre diisc și bieletă, situat pe un cerc de rază  $r$  și făcând unghiul  $\alpha_r$  în plan orizontal cu axa  $x$ , figura 5. Unghiul  $\alpha_r$  trebuie să fie multiplu al unghiului la centru făcut de axele a două articulații sferice consecutive. Se consideră mișcarea punctului  $D_1$  descompusă în două mișcări, una de rotație în jurul axei  $y$  cu unghiul  $\theta$  și una de rotație în jurul axei  $CK_1$  cu unghiul  $\gamma$ . Dreapta  $D_1K_1$  este perpendiculară pe  $CD$  și în timpul rotației cu unghiul  $\theta$  ea ajunge în poziția  $D'_1K'_1$ , rămânând perpendiculară pe planul  $zCx$  (și pe dreapta  $CK'_1$ ). În continuare prin rotația cu unghiul  $\gamma$  punctul  $D'_1$  ajunge în  $D''_1$ . Din punctul  $D''_1$  se trasează perpendiculara  $\underline{a}$  pe dreapta  $D'_1K'_1$  care este conținută într-un plan perpendicular pe  $CK'_1$  și este paralelă cu planul  $zCx$ ; proiecția sa pe acest plan făcându-se în adevărată mărime, fig. 6.

Conform figurii 6 rezultă

$$a = r \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin \gamma \quad (8)$$

Conform figurilor 5 și 6 se obține:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cdot \cos \alpha_r \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin \theta \cdot \sin \gamma \\
 y &= r \cdot \sin \alpha_r \cdot \cos \gamma \\
 z &= r \cdot \cos \alpha_r \cdot \sin \theta + a \cdot \cos \theta = r \cdot \cos \alpha_r \cdot \sin \theta + r \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin \gamma \cdot \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

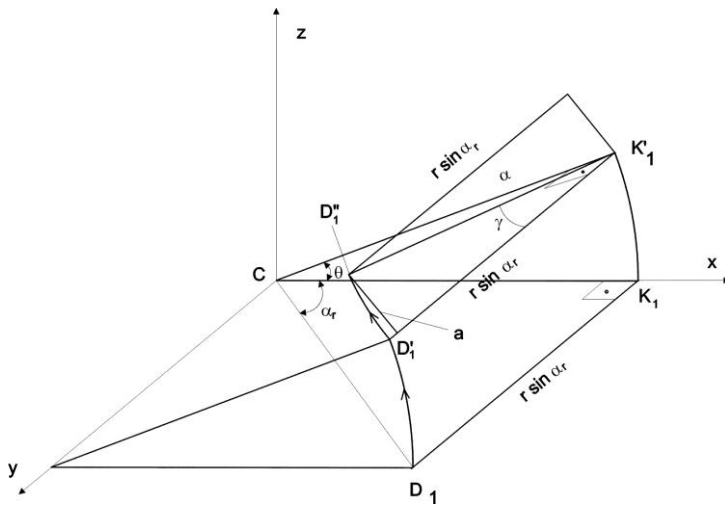


Fig. 5

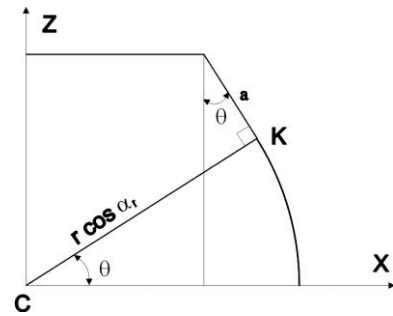


Fig. 6

c) *Determinarea unghiului  $\gamma$*

Această determinare se face pe baza figurii 7. Conform acestei figuri se poate scrie:

$$\sin \gamma = \frac{D_1 B}{r'} = \frac{D_1 B'}{\cos \theta \cdot r'} = \frac{D_1 B'}{\cos \theta \cdot r \cdot \sin \varphi} .
 \tag{10}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \theta}{\sin \varphi \cdot \cos \theta} ;
 \tag{11}$$

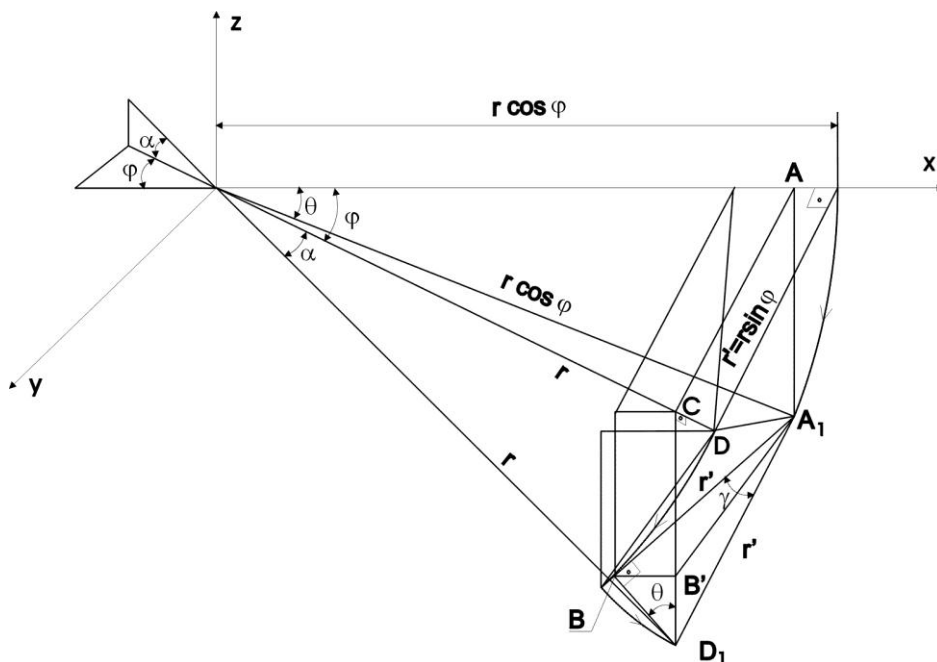


Fig. 7

Pe baza relațiilor (9) au fost trasate traiectoriile punctelor  $D_1$  pentru un ciclu complet (o rotație a arborelui de intrare,  $\varphi=0\dots360^\circ$ ). Aceste traiectorii sunt octoide sferice. Forma acestor octoide și mărimea lor diferă în funcție de parametrii care intră în expresiile coordonatelor punctul  $D_1$  ( $\alpha, r, \alpha_r$ ). În figura 7 sunt prezentate aceste traiectorii proiectate pe un plan frontal.

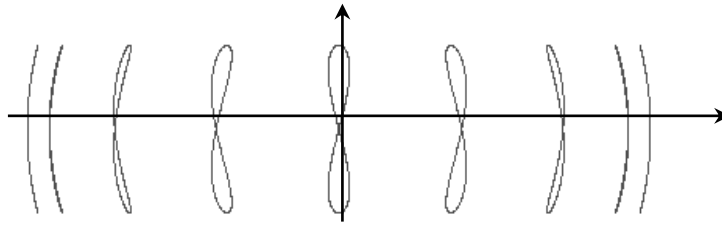


Fig. 8

#### d) Determinarea poziției articulației pistonului

Poziția articulației pistonului, punctul E, se determină exprimând lungimea cunoscută a bieletei DE,  $l_b$ , cu formula distanței

$$l_b^2 = (x_E - x)^2 + (y_E - y)^2 + (z_E - z)^2 \quad (12)$$

și ținând cont că proiecțiile  $x_E$  și  $y_E$  sunt cunoscute, ele aflându-se pe axele cilindrilor în care se deplasează pistoanele. Efectuând calculele rezultă

$$z_E = z + \sqrt{l_b^2 - (x_E - x)^2 - (y_E - y)^2} \quad (13)$$

### 3. Studiu de viteze

Prin derivarea ecuației (7) în raport cu timpul se obține expresia vitezei unghiulare în mișcarea de rotație a discului în plan vertical. Astfel

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \dot{\theta} = -\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (14)$$

în care:  $\dot{\theta} = \omega_d$ ;  $\dot{\varphi} = \omega$

și ecuația devine

$$\omega_d = -\cos^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \omega \quad (15)$$

Prin derivarea relațiilor (9) se obțin expresiile vitezelor punctelor  $D_1$ . Expresiile acestora sunt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r \cdot \cos \alpha_r \cdot \sin \theta \cdot \omega_d - r \cdot \sin \alpha_r \cdot \cos \theta \cdot \sin \gamma \cdot \omega_d - r \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \dot{\gamma} \\ \dot{y} &= -r \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin \gamma \cdot \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{z} = -r \cdot \cos \alpha_r \cdot \cos \theta \cdot \omega_d + r \cdot \sin \alpha_r \cdot \cos \theta \cdot \cos \gamma \cdot \dot{\gamma} - r \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin \theta \cdot \sin \gamma \cdot \omega_d$$

Pentru determinarea expresiei  $\dot{\gamma}$  se pornește de la relația (11)

$$\frac{d}{dt}(\sin \gamma) = \cos \gamma \cdot \dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \theta}{\sin \varphi \cdot \cos \theta} \right) \quad (17)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega \cdot \cos \theta \cdot (\sin \theta - \sin \alpha \cdot \cos \varphi) - \omega_d \cdot \sin \varphi \cdot (\cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \theta)}{\cos \gamma \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \theta} \quad (18)$$

În figura 9 este prezentat modul cum variază viteza punctului  $D_1$  pe durata unui ciclu (o rotație completă a arborelui de intrare), viteza unghiulară  $\omega$  a arborelui de intrare al reductorului fiind constantă, în două situații: arborele de intrare înclinat cu  $2,5^\circ$  și cu  $15^\circ$ .

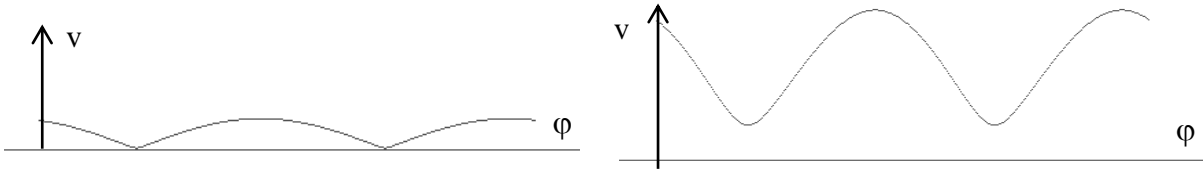


Fig. 9

Determinarea vitezei articulației pistonului se determină derivând în raport cu timpul relația 12 și se obține

$$\dot{z}_E = \frac{\dot{x}(x_E - x) + \dot{y}(y_E - y) + \dot{z}(z_E - z)}{z_E - z}. \quad (19)$$

#### 4. Studiu de accelerații

Prin derivarea ecuației (15) în raport cu timpul se obține expresia accelerației unghiulare în mișcarea de rotație a discului în plan vertical:

$$\varepsilon_d = 2 \cdot \cos\theta \sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \omega - \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\theta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \omega - \dot{\omega} \cdot \cos^2\theta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi$$

Făcând transformările trigonometrice posibile și ținând cont de valoarea lui  $\cos^2\theta$  din (15) se obține

$$\varepsilon_d = \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \omega \cdot \omega_d + \omega \cdot \omega_d \cdot \operatorname{ctg}\varphi + \frac{\varepsilon \cdot \omega_d}{\omega} \quad (20)$$

Accelerațiile punctelor  $D_1$  se obțin prin derivarea în raport cu timpul a sistemului de ecuații (16). Expresiile acestora sunt:

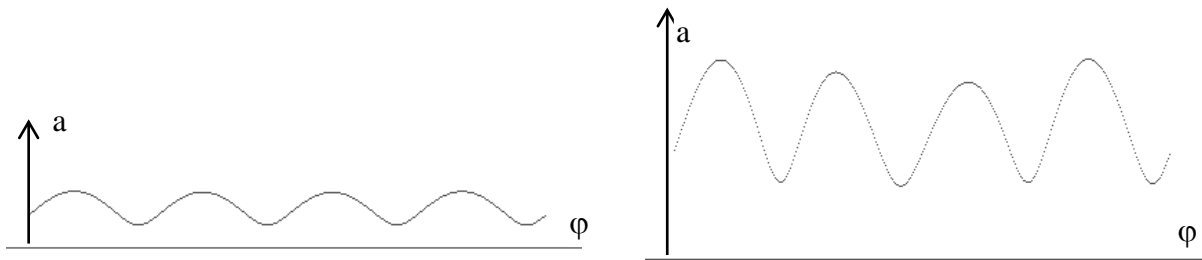
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -r \cdot \cos\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \omega_d^2 - r \cdot \cos\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \varepsilon_d + r \cdot \sin\alpha_p \cdot \sin\theta \cdot \sin\gamma \cdot \omega_d^2 - \\ &- r \cdot \sin\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \cos\gamma \cdot \dot{\gamma} \cdot \omega_d - r \cdot \sin\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \sin\gamma \cdot \varepsilon_d - \\ &- r \cdot \sin\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \cos\gamma \cdot \dot{\gamma} \cdot \omega_d + r \cdot \sin\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \sin\gamma \cdot \dot{\gamma}^2 - \\ &- r \cdot \sin\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \cos\gamma \cdot \ddot{\gamma} \\ \ddot{y} &= -r \cdot \sin\alpha_r \cdot \cos\gamma \cdot \dot{\gamma}^2 - r \cdot \sin\alpha_r \cdot \sin\gamma \cdot \ddot{\gamma} \\ \ddot{z} &= -r \cdot \cos\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \omega_d^2 + r \cdot \cos\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \varepsilon_d + \\ &+ r \cdot \sin\alpha_p \cdot \sin\theta \cdot \cos\gamma \cdot \dot{\gamma} \cdot \omega_d - r \cdot \sin\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \sin\gamma \cdot \dot{\gamma}^2 + \\ &+ r \cdot \sin\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \cos\gamma \cdot \ddot{\gamma} - r \cdot \sin\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \cos\gamma \cdot \dot{\gamma} \cdot \omega_d - \\ &- r \cdot \sin\alpha_r \cdot \cos\theta \cdot \sin\gamma \cdot \omega_d^2 - r \cdot \sin\alpha_r \cdot \sin\theta \cdot \sin\gamma \cdot \varepsilon_d \end{aligned} \quad (21)$$

în care  $\ddot{\gamma}$  rezultă prin derivarea în raport cu timpul a relației (18).

În figura 10 este prezentat modul de variație a accelerației punctului  $D_1$ , pentru accelerația unghiulară la arborele de intrare  $\varepsilon = 0$ . Unghiul de înclinare al arborelui conducător este de  $2,5^\circ$  (stânga) și respectiv  $15^\circ$  (dreapta)

Determinarea accelerației articulației pistonului se determină derivând de două ori în raport cu timpul relația 12 și se obține

$$\ddot{z}_E = \frac{\ddot{x}(x_E - x) + \ddot{y}(y_E - y) + \ddot{z}(z_E - z) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 + (\dot{z}_E - \dot{z})^2}{z_E - z}. \quad (22)$$



**Fig. 10**

### **Bibliografie**

- [1] **Pelecudi Cr.** – *Teoria mecanismelor spațiale*. Editura Academiei RSR, București, 1972
- [2] **Bruja A., Dima M.** – *Studiul cinematicii mecanismului cu bare spațial al al reductorului armonic frontal cu element rigid*. Buletinul științific al UTCB, nr.4/1998.